

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA**

Jefferson Luiz Jeronimo

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS BASEADA EM ALGORITMOS GENÉTICOS
CONTÍNUOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Ph.D. Marcelo Krajnc Alves

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Jeronimo, Jefferson Luiz

Otimização de estruturas de materiais compósitos baseada
em algoritmos genéticos contínuos. / Jefferson Luiz

Jeronimo ; orientador, Marcelo Krajnc Alves -
Florianópolis, SC, 2014.

120 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Otimização. 3. Algoritmos
genéticos. 4. Método dos elementos finitos. 5. Compósitos
laminados. I. Alves, Marcelo Krajnc. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

Jefferson Luiz Jeronimo

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS BASEADA EM ALGORITMOS GENÉTICOS
CONTÍNUOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica” e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 19 de setembro de 2014.

Prof. Armando Albertazzi, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Marcelo Krajnc Alves, P.h.D.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Lindaura Maria Steffens, P.h.D.
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Prof. André Ogliari, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. José Carlos Pereira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Dedico este trabalho às pessoas que estiveram ao meu lado com apoio e incentivo para que ele pudesse ser concluído.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiz Gonzaga Jeronimo e Lidia Luiz Jeronimo, pelo apoio e pela total confiança que depositaram em mim.

À minha irmã, Joice Luiz Jeronimo, que fez com que eu acreditasse que seria possível, além de estar sempre ao meu lado proporcionando meu crescimento pessoal.

Aos meus amigos, pelo suporte concedido e pela motivação passada para que eu conseguisse finalizar essa etapa importante da vida.

Ao meu orientador, professor Marcelo Krajnc Alves, que, além da orientação acadêmica, me transmitiu lições que muito me auxiliam na minha formação pessoal e profissional.

Agradeço principalmente a Deus, por ter me dado saúde e paz para que pudesse alcançar mais um objetivo em minha vida.

“Não é o mais forte que sobrevive, nem o mais inteligente, mas o que melhor se adapta as mudanças.”

(Charles Darwin)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para determinação de estruturas ótimas, tendo como principal objetivo a otimização do uso dos materiais nas mais diversas aplicações. Para aplicação da metodologia, é utilizado o método de elementos finitos como ferramenta para o cálculo estrutural. Na continuidade, para que se alcance os resultados ótimos, é aplicado o método dos algoritmos genéticos contínuos, o qual se baseia no processo de seleção natural entre gerações envolvendo o cruzamento e mutação de indivíduos, que acarreta na determinação do indivíduo mais apto, visto como solução ótima do problema. Neste trabalho, propõe-se o desenvolvimento e implementação de um algoritmo para otimização estrutural, com auxílio de um software comercial. Os casos apresentados neste trabalho seguem a teoria de materiais compósitos laminados.

Palavras-chave: Otimização.Método de Elementos Finitos.Algoritmos Genéticos.Compósitos Laminados.

ABSTRACT

This work presents a methodology for determining the optimal structures, with the primary objective to optimize the use of materials in various applications. For application of the methodology, is used finite element method as a tool for the structural calculation. Subsequently, in order to reach optimal results, the genetic algorithms continuous method is applied, which is based on natural selection process intergeneration involving crossover and mutation of individuals, which entails the determining of the more apt individual, seen as a problem optimal solution. In this work, we propose an algorithm for applying structural optimization with the aid of a commercial software. The cases presented in this work follow the theory of the laminates composites.

Keywords: Optimization. Finite Element Method. Genetic Algorithms. Laminates Composites.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução tecnológica dos materiais aplicados a estruturas..	24
Figura 2 - Fluxograma de um algoritmo genético discreto .	33
Figura 3 - Exemplo de cruzamento em algoritmo genético binário	35
Figura 4 - Troca de genes no processo de mutação.....	36
Figura 5 - Exemplo do processo de mutação em algoritmos genéticos.	36
Figura 6 - Fluxograma de um algoritmo genético contínuo	37
Figura 7 - População inicial uniformemente distribuída	39
Figura 8 - População inicial aleatoriamente distribuída	40
Figura 9 - Método mais simples para a realização do cruzamento.....	46
Figura 10 - Método mais extremo para a realização do cruzamento.....	46
Figura 11 - Método de cruzamento com combinação de genes.	47
Figura 12 - Fibras curtas não orientadas.	54
Figura 13 - Fibras longas não orientadas.....	54
Figura 14 - Fibras longas orientadas.	54
Figura 15 - Representação dos eixos de ortotropia para uma lâmina. ...	57
Figura 16 - Sistema de eixos de ortotropia e de referência	60
Figura 17 - Composição do laminado conforme as camadas.	68
Figura 18 - Fluxograma do método proposto.....	75
Figura 19 - Fluxograma de um algoritmo genético contínuo	78
Figura 20 - Diagrama do problema proposto: viga engastada.....	81
Figura 21 - Malha gerada para análise dos dois primeiros problemas ..	84
Figura 22 - Problema proposta para o Caso 1	86
Figura 23 - Distribuição das orientações das lâminas	87
Figura 24 - Estudo da influência do tamanho da população.....	88
Figura 25 - Estudo da influência da taxa de mutação.....	90
Figura 26 - Vista tridimensional do vaso de pressão em estudo	91
Figura 27 - Dimensões do vaso de pressão em estudo	91
Figura 28 - Malha utilizada para simulação do vaso de pressão em estudo	92
Figura 29 - Arranjo de espessuras e ângulos na estrutura proposta.....	92
Figura 30 - Gráfico tridimensional da função objetivo para cada par de tamanho da população e taxa de mutação proposta.....	96
Figura 31 - Gráfico tridimensional do número de iterações para cada par de tamanho da população e taxa de mutação proposta.....	97
Figura 32 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e taxa de mutação para os diferentes tamanhos de população.....	98
Figura 33 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e tamanho da população para as diferentes taxas de mutação.	98

Figura 34 - Relação entre o número de iterações e a taxa de mutação para os diferentes tamanhos de população.....	99
Figura 35 - Relação entre o número de iterações e o tamanho de população para as diferentes taxas de mutação.....	99
Figura 36 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 15 indivíduos.....	100
Figura 37 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 31 indivíduos.....	101
Figura 38 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 44 indivíduos.....	101
Figura 39 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 60 indivíduos.....	102
Figura 40 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 75 indivíduos.....	102
Figura 41 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 91 indivíduos.....	103
Figura 42 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 10%.....	104
Figura 43 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 20%.....	104
Figura 44 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 30%.....	105
Figura 45 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 40%.....	105
Figura 46 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 50%.....	106
Figura 47 - Relação entre valor médio da função objetivo obtido e tamanho de população com seu respectivo desvio padrão.....	107
Figura 48 - Relação entre valor médio da função objetivo obtido e taxa de mutação com seu respectivo desvio padrão.	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1– Comparação entre um avião construído com materiais compósitos e um avião com materiais tradicionais	25
Tabela 2 - Propriedades mecânicas de três tipos de prepegs.....	77
Tabela 3 - Tamanho ótimo da população e da taxa de mutação encontrados após 200 executadas independentes do algoritmo genético	80
Tabela 4 - Parâmetros utilizados no AGC para validação.....	82
Tabela 5 - Resultados das propostas apresentadas	84
Tabela 6 - Parâmetros utilizados no AGC para o Caso 1	87
Tabela 7- Tamanhos de população utilizados	88
Tabela 8 - Taxa de mutação utilizadas	89
Tabela 9 - Parâmetros utilizados no AGC para o Caso 2	93
Tabela 10 - Solução ótima do caso em estudo	94
Tabela 11 - Tamanhos de população e taxas de mutação utilizados	95
Tabela 12 - Valores obtidos através da função objetivo para cada par de tamanho de população e taxa de mutação.	95
Tabela 13 - Número de iterações necessários para otimizar a cada par de tamanho de população e taxa de mutação proposta.....	96

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 OBJETIVOS	27
1.1.1 Objetivo Geral	27
1.1.2 Objetivos Específicos	27
1.1.3 Estado da Arte	27
1.1.4 Principais Contribuições.....	29
1.1.5 Estrutura da Dissertação	30
2 DESCRIÇÃO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS	31
2.1 CONCEITO DE OTIMIZAÇÃO	31
2.1.1 Introdução.....	31
2.2 ALGORITMOS GENÉTICOS	31
2.2.1 Algoritmos Genéticos Discretos	33
2.2.2 Algoritmos Genéticos Contínuos.....	36
2.2.2.1 Componentes de um Algoritmo Genético Contínuo	37
3 COMPÓSITOS LAMINADOS	53
3.1 INTRODUÇÃO	53
3.2 LÂMINA.....	56
3.3 LAMINADO	59
3.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES.....	64
3.5 ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS	67
4 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ALGORITMOS GENÉTICOS CONTÍNUOS (AGC)	75
4.1 DESCRIÇÃO DAS ETAPAS	76
4.1.1 Dados de Entrada da Estrutura a ser Otimizada e Formulação do Problema.....	76
4.1.2 Criação da Rotina do Algoritmo Genético e Definição de Parâmetros	78
5 SIMULAÇÃO E RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO DO AGC	81

5.1 ETAPA DE VALIDAÇÃO DO ALGORITMO GENÉTICO CONTÍNUO.....	81
5.1.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo	81
5.1.2 Análise dos Resultados.....	82
5.2 APLICAÇÃO EM COMPÓSITOS LAMINADOS – ESTUDOS DE CASO.....	85
5.2.1. Estudo de Caso 1: Placa engastada.....	85
5.2.1.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo	87
5.2.1.2 Análise dos Resultados	87
5.2.2 Estudo de Caso 2: Vaso de pressão.	90
5.2.2.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo	93
5.2.2.2 Análise dos Resultados	94
5.2.2.3 Análise do Comportamento do Algoritmo Genético Contínuo	94
6 CONCLUSÕES.....	109
6.1 CONCLUSÕES	109
6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	109
REFERÊNCIAS.....	111
ANEXOS.....	117
MUDANÇA DE BASE	117

1 INTRODUÇÃO

A otimização tem sido amplamente utilizada nos mais diversos campos da ciência como um modo de extrair o melhor rendimento possível de algo, podendo ser um processo produtivo, o dimensionamento ótimo de um produto ou até mesmo o lucro de uma empresa. Em particular, na área estrutural mecânica, a otimização é abordada com o objetivo de redução de custo e material, permitindo o desenvolvimento e aprimoramento do uso de tecnologias antes não aplicadas, como exemplo o uso de materiais compósitos.

O conceito de otimização, que pode ser encontrado descrito em Haftka, Gurdal e Hajela (1998) ou em Arora (2004) consiste de um modo geral, encontrar a configuração de variáveis de um problema que resulte em uma resposta de maneira tal que as especificações sejam atendidas da melhor forma possível. Para tal fim, se faz necessário definir o problema identificando o que se deseja otimizar, ou seja, a sua função objetivo. Por exemplo, para se obter a menor massa para a fuselagem de uma aeronave, a massa será denominada função objetivo do problema, que neste caso será minimizada.

Segundo Weise (2009), os algoritmos de otimização são divididos em duas classes básicas: algoritmos determinísticos e probabilísticos. Os determinísticos são os mais utilizados, se há uma clara relação entre as soluções possíveis e a utilidade para um determinado problema. Se a superfície de solução for muito complexa ou as dimensões do espaço de busca for muito grande, torna-se mais difícil resolver o problema de forma determinística.

Para Almeida et al. (2009) a otimização de estruturas em material compósito tipicamente acaba por envolver um espaço de busca multimodal, o que pode levar os métodos baseados nos gradientes das funções a convergir em um ótimo local.

Nesse ponto entram os algoritmos probabilísticos, como exemplo, as abordagens baseadas em Monte Carlo e algoritmos genéticos. Eles apresentam soluções que não necessariamente representam o ótimo global e necessitam de mais tempo para encontrar a solução.

A vantagem de algoritmos baseados em teorias evolucionárias em relação a outros métodos de otimização é que eles tem uma eficiência maior em encontrar o mínimo global para os mais variados problemas.

De acordo com Castro et al. (2006) os algoritmos genéticos têm sido aplicados em análises estruturais estáticas com objetivo de redução

de peso desde 1989. Mais recentemente algumas aplicações em análises dinâmicas e de dano têm sido realizadas.

A crescente procura por soluções alternativas para melhora de variáveis estruturais, acabamento superficial e liberdade para a criação de formas mais complexas, vem estimulando a utilização de materiais compósitos e estruturas sanduíches. Como consequência, aumentando a utilização de técnicas de otimização. Na Figura 1 pode-se observar que é crescente a aplicação desse tipo de material.

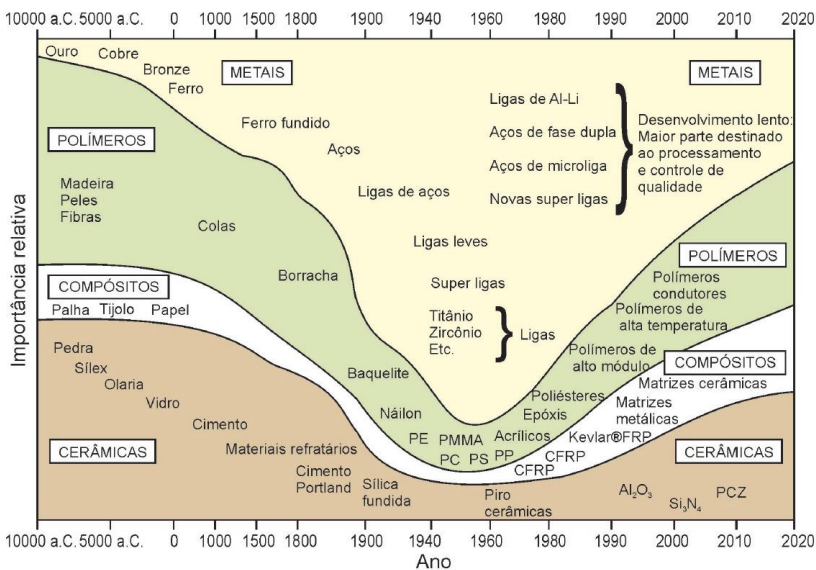


Figura 1 – Evolução tecnológica dos materiais aplicados a estruturas

Fonte: Cupertino (2009).

Diversas áreas da indústria têm utilizado compósitos. Os motivos são diversos, que vão desde a redução de custo, até a flexibilidade de projeto.

Um material constituído de duas fases visíveis a nível macroscópico e não solúveis uma na outra é definido como um material compósito. De maneira que uma das fases podem ser fibras, por esse motivo vários são os tipos de fibras que têm sido desenvolvidas para que se alcance as demandas tecnológicas, como as de carbono, boro e aramida, além de novos compósitos com matrizes metálicas e cerâmicas.

A aplicação desse tipo de material em estruturas se tornou viável graças às evoluções tecnológicas nesse setor. Tal motivação para o

investimento no desenvolvimento dessa nova tecnologia, tanto por ação governamental como por privada, se deu pelo potencial de redução de massa em estruturas com grande compromisso estrutural.

Grande parte dos investimentos realizados se deu no setor aeroespacial e observa-se os resultados surgindo a alguns anos, cada vez mais partes dos aviões comerciais vem sendo substituídas por peças em material compósito. O ápice desta evolução se deu com o lançamento do Boing 787 Dreamliner, onde toda a fuselagem é construída com materiais compósitos. O lançamento desse produto mostrou o ganho que se pode obter com a substituição dos materiais comuns por compósitos.

Na Tabela 1 é apresentado um comparativo entre os aviões Boing 787-8 Dreamliner e o 777-200 equivalente.

Tabela 1– Comparação entre um avião construído com materiais compósitos e um avião com materiais tradicionais

	<i>Boing 787-8</i>	<i>Boing 777-200</i>
Capacidade de combustível (mil litros)	126,9	117,3
Peso da aeronave (ton)	110	134,8
Alcance (Km)	15200	9695
Passageiros (máx)	440	440
Peso máximo decolagem (ton)	227,9	247
Peso máximo pouso (ton)	172,3	201
Comprimento (m)	57	63,7
Envergadura (m)	60	60,9
Seção (m)	5,91	6,19

Com os valores apresentados pode-se concluir que a aplicação desse tipo de material em outros setores da engenharia é de grande potencial, uma vez que outros materiais utilizados nas mesmas condições não tem a mesma performance. Algumas condições de projeto específicas também podem desqualificar ou descartar a utilização da maioria dos materiais normalmente utilizados. Nesse ponto, a utilização de materiais compósitos pode ser uma alternativa viável para o desenvolvimento tecnológico.

Além da aplicação aeronáutica vem se tornando cada vez mais comum a aplicação de estruturas sanduíches e compósito no ramo automotivo. Hoje já existem carrocerias de caminhões inteiramente construídas com essa tecnologia, assim como a inclusão desses materiais em automóveis de passeio.

A aplicação de materiais compósitos tem aumentado devido a algumas vantagens características, como:

- Possibilidade de redução de massa;
- Altas propriedades mecânicas;
- Resistência a intempéries;
- Possibilidade de construção de formas complexas;
- Alta qualidade de acabamento superficial;
- Aumento da capacidade de transporte dos veículos;
- Aumento da autonomia dos veículos;
- Aumento da relação potência/peso, melhorando o desempenho dos veículos;
- Aumento da segurança veicular;

Grande parte da vantagem da aplicação dos materiais compósitos se dá pela anisotropia intrínseca a ele, permitindo que se otimize a estrutura, reforçando-a no local e no sentido que realmente é necessário.

Já as desvantagens da utilização de materiais compósitos são:

- Alto custo de fabricação (parâmetro crítico);
- A caracterização mecânica de compósitos estruturais são mais complexas do que metais aplicados a estruturas;
- A manutenção não é um processo simples, se comparada à realizada em metais;
- Compósitos não têm características combinadas de alta resistência mecânica e à fratura, quando é comparado com os metais;
- Não necessariamente este tipo de material terá um alto desempenho em todas as propriedades utilizadas para a seleção.

Em face das vantagens e das desvantagens da utilização de materiais compósitos e as vantagens de se otimizar uma estrutura constituída desse material, o presente trabalho, por meio do desenvolvimento da rotina de otimização por algoritmos genéticos contínuos, busca auxiliar no desenvolvimento de tecnologias em suas aplicações para potencializar e viabilizar o uso dessas inovações, onde atualmente encaixam-se os materiais compósitos.

Algoritmos genéticos é um tipo de método de otimização que tem como base os princípios da genética e da seleção natural. Segundo Castro et al. (2006) os algoritmos genéticos podem ser considerados como uma família de modelos computacionais inspirados nos princípios da evolução. Uma boa forma de entender a filosofia desta técnica é entender o Darwinismo. Um algoritmo genético permite que uma população composta por muitos indivíduos evolua, sobre regras de seleção específicas. Assim permite que se encontre o indivíduo mais apto para a situação imposta.

Ao contrário dos métodos clássicos de otimização, que não permitem determinar se o mínimo é global ou local, os algoritmos genéticos buscam o mínimo global, além de não requer informações das derivadas das funções envolvidas no problema. O algoritmo genético contínuo (AGC) por representar as variáveis por números reais aumenta a precisão dos resultados, e tem um esforço computacional inferior ao algoritmo genético discreto ou binário (AGB), visto que não necessita codificar em binário as informações iniciais para avaliar a população, o que justificou a escolha do algoritmo genético contínuo para a otimização estrutural proposta nesta dissertação.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Devido aos motivos apresentados anteriormente, esse trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar um método de otimização de estruturas baseado nos algoritmos genéticos contínuos.

1.1.2 Objetivos Específicos

Pode-se citar as seguintes fases para a resolução do problema proposto:

- Implementação de uma rotina de otimização estrutural baseada em algoritmo genético contínuo;
- Validação da aplicação do método dos algoritmos genéticos contínuos na solução de problemas com materiais compósitos;
- Elaboração uma rotina que possibilite a utilização do software comercial *Ansys* em modo *batch* para a análise estrutural dos casos propostos;

1.1.3 Estado da Arte

Belo (2006) formula o problema da aplicação do método dos elementos finitos em compósitos laminados utilizando a teoria de primeira ordem de Mindlin. O mesmo objetiva desenvolver um método

de análise confiável e com os menores erros de precisão entre os resultados simulados e analíticos. No entanto, o autor não se preocupa com o dimensionamento ótimo em termos econômicos e de massa dos compósitos laminados estudado.

Sommer (2010) propõe a otimização de estruturas de navios graneleiros por algoritmos genéticos em modelos construídos com elementos utilizando a formulação de viga. Os objetivos principais são a redução de massa e a redução das máximas tensões absolutas atuantes no modelo. A abordagem se limita a materiais com comportamento isotrópico, diferentemente da abordagem tratada no presente trabalho.

López (2009) aborda a otimização de placas em materiais compósitos utilizando algoritmos genéticos, redes neurais e elementos finitos. O grande enfoque do trabalho é a avaliação dos resultados e a velocidade dos métodos. A aplicação dos métodos se deteve a materiais compósitos e algoritmos genéticos binários, diferentemente da abordagem proposta no presente trabalho, a qual gera resultados para materiais isotrópicos, estruturas sanduíches e materiais compósitos, além da aplicação da técnica dos algoritmos genéticos contínuos para a otimização.

Ninni et al. (2010) estuda a otimização de painéis sob carregamentos de compressão constituídos de materiais compósitos. Para o referido trabalho é utilizado a metodologia de otimização direcional, aplicando a técnica em estruturas construídas em material compósito. Os trabalhos se diferem nos métodos de otimização e nos critérios de falha aplicados, além da otimização de estruturas sanduíche e materiais isotrópicos.

Castro et al. (2006) propõe realizar a otimização de seções transversais de estruturas metálicas com o intuito de obter o peso mínimo, em análises dinâmicas.

Almeida et al. (2009) apresenta uma técnica para a otimização de compósitos laminados. O processo de otimização é realizado utilizando algoritmo genético binário, associado ao método dos elementos finitos (MEF) para análises estruturais. Dois casos de otimização com multiobjetivos, de placas com carregamentos no plano e transversal são estudados. Nos exemplos apresentados têm-se como objetivo a minimização do peso e da deflexão.

Chelouah et al. (2000) propôs um novo algoritmo para a otimização global de funções, baseado na teoria dos algoritmos genéticos contínuos. O trabalho foi desenvolvido primeiramente determinando uma população inicial adequada, então localizou-se a área mais promissora e por fim intensificou-se a busca nessa região.

Gatzi et al. (2000) desenvolveu a integração do algoritmo genético com um programa comercial para cálculo estrutural. Para que houvesse uma melhora da performance, o método foi implementado para que se obtivesse soluções em paralelo, tornando possível sua utilização de forma comercial.

Erbatur et al. (2000) teve como tema o desenvolvimento de um programa para otimização discreta de estruturas planas e espaciais, compostas de elementos unidimensionais. A principal característica é a utilização dos algoritmos genéticos como técnica de otimização. No decorrer do trabalho são discutidas aplicações em treliças e outras estruturas de aço.

Al-Shihri (2009) propôs um algoritmo evolutivo novo, baseado em algoritmo genético, o qual é adequado para uma classe geral de problemas de otimização estrutural. O algoritmo proposto foi concebido de modo a convergir rapidamente para ótimos locais sempre que uma solução ótima local é próxima.

Kumar (2013) propõe um algoritmo que minimiza os custos de material, determina a topologia ótima com o número de pórticos e treliças, bem como o padrão de seções transversais. A otimização é realizada pelo método do algoritmo genético (AG).

Kaveh et al. (2010) desenvolveu um algoritmo evolucionário híbrido baseado nos algoritmos genéticos (*GA*) e otimização por enxame de partículas (*PSO*), denotado por *HGAPSO*. No decorrer do trabalho o algoritmo *HGAPSO* é comparado com o *GA* e *PSO* para todos os exemplos de projeto.

1.1.4 Principais Contribuições

- Desenvolvimento e implementação de uma rotina de otimização baseada na teoria dos algoritmos genéticos contínuos.
- A aplicação da rotina de otimização desenvolvida a ser utilizada não somente para materiais compósitos, mas também para estruturas sanduíches e até mesmo para os materiais comumente utilizados hoje, desde que sejam feitas as devidas alterações. Esse tipo de flexibilidade é importante, pois se pode comparar os mais diversos materiais na mesma aplicação, na configuração otimizada.

1.1.5 Estrutura da Dissertação

A seguir são apresentados de forma sucinta os conteúdos dos cinco capítulos que compõem este trabalho.

Neste capítulo foi realizada uma breve abordagem sobre a otimização através do algoritmo genético contínuo, os fatores positivos e negativos deste tipo de material, os ganhos que se tem na combinação dessas duas tecnologias, o objetivo e as principais contribuições deste trabalho, além do estado da arte do tema proposto.

O algoritmo genético é abordado no Capítulo 2, no qual se faz uma breve introdução sobre duas técnicas, contínua e discreta, mas aprofunda-se na utilizada para a realização do trabalho, ie, nos algoritmos genéticos contínuos. Algumas informações complementares são apresentadas, como a estrutura lógica de programação, o fluxograma e a eficiência deste método.

No Capítulo 3 é apresentada uma breve definição de compósitos laminados, a diferença entre as abordagens micromecânica e macromecânica, além dos tópicos, mudança de base, propriedades da lâmina, comportamento do laminado, estado plano de tensões e esforços e deformações generalizadas em placas de Mindlin.

No Capítulo 4 é apresentada o método adotado na dissertação para aplicação de algoritmo genético contínuo na otimização de estruturas.

As teorias apresentadas nos capítulos anteriores são utilizadas no Capítulo 5 para a formulação dos problemas, no qual são discutidos os resultados obtidos, tanto para a solução encontrada para a estrutura proposta, como para os parâmetros utilizados no algoritmo genético contínuo.

2 DESCRIÇÃO DOS ALGORITMOS GENÉTICOS

2.1 CONCEITO DE OTIMIZAÇÃO

2.1.1 Introdução

O processo de otimização pode ser realizado de várias maneiras, utilizando diversas técnicas diferentes, conforme descreve Saramago et al (2008). Normalmente são divididos em dois grupos:

- Métodos baseados em programação matemática;
- Métodos aleatórios.

Os métodos baseados em programação matemática podem ser exemplificados por:

- Método da máxima direção de descida;
- Método Quasi-Newton;
- Métodos de segunda ordem, tais como o método da programação sequencial quadrática, entre outros.

Como exemplos de métodos aleatórios tem-se:

- Algoritmos genéticos;
- Otimização por enxame de partículas (PSO);
- Otimização por colônia de formigas (ASO).

A proposta deste trabalho consiste em apresentar um método aleatório, baseado em algoritmos genéticos contínuos, o qual difere da forma mais tradicional que emprega uma codificação binária das variáveis de projeto.

2.2 ALGORITMOS GENÉTICOS

Chelouah et al. (2000) define os algoritmos genéticos como técnicas de busca estocásticas baseados em operadores aleatórios, tais como: seleção, cruzamento e mutação sendo estes operadores inspirados pela reprodução e evolução natural das criaturas vivas.

De modo geral o método dos algoritmos genéticos tem sido desenvolvido desde 1975 com os trabalhos iniciais de John Holland e posteriormente de David Goldberg entre muitos outros pesquisadores, dando prosseguimento à evolução e disseminação do método dos algoritmos genéticos.

A utilização de métodos de otimização sempre vem acompanhada da questão de qual método utilizar. Fazendo-se uma pesquisa não é complicado chegar à conclusão de que é necessário conhecer bem o problema que se deseja otimizar, pois todo método tem sua eficácia maior quando utilizado em problemas com algumas características específicas.

As principais características dos algoritmos genéticos são:

- Ser Capaz de otimizar variáveis contínuas ou discretas;
- Não requerer informações das derivadas das funções;
- Possibilitar a análise simultânea de uma grande amostragem de indivíduos fazendo uso de processamento em paralelo;
- Permite determinar uma aproximação do mínimo global mesmo em domínios de projeto complexos envolvendo funções objetivo não suaves;
- Provê uma lista de soluções ótimas, não restringindo-se a uma única solução;
- Permite codificar as variáveis para uso na análise de otimização, no caso binário;
- Funciona com dados gerados numericamente, experimentais ou funções analíticas.

Gatzi et al. (2000) verificaram que, no caso de um problema de otimização estrutural discreto, descontínuo e não convexo, a utilização dos algoritmos genéticos se torna interessante, mesmo estes possuindo um alto custo computacional. Em contraste com os métodos baseados em gradientes, os algoritmos genéticos trabalham com populações de soluções, que tipicamente envolvem centenas de gerações.

Segundo Pezeshek et al. (2004) os estudos têm demonstrado que os algoritmos genéticos podem ser ferramentas de projeto para otimização discreta de grande potencial. Uma vez que algoritmos genéticos não necessitam de informações de gradiente.

Analisar trabalhos de pesquisa realizados anteriormente e observar as conclusões é uma forma de verificar qual ou quais são os métodos mais indicados para cada situação. De acordo com Costa et al. (1998), em geral, o problema de otimização da seqüência do empilhamento de laminados em um material compósito é formulado

como um problema de otimização contínuo o qual é resolvido através de métodos numéricos baseados em gradientes.

As razões citadas anteriormente e as características dos métodos de otimização baseados em algoritmos genéticos motivaram o desenvolvimento do presente trabalho. A abordagem dos próximos itens serão sobre os algoritmos genéticos binários e contínuos. Para que haja maior facilidade de compreensão e uma fácil associação ao comportamento biológico, é primeiramente apresentado o método do algoritmo genético usando codificação binária.

2.2.1 Algoritmos Genéticos Discretos

Os algoritmos genéticos discretos são métodos de otimização evolucionários, ou seja, utilizam-se dos métodos de evolução observados nas espécies para a estruturação lógica, mostrada na forma de um fluxograma e descrito na Figura 2 a seguir.

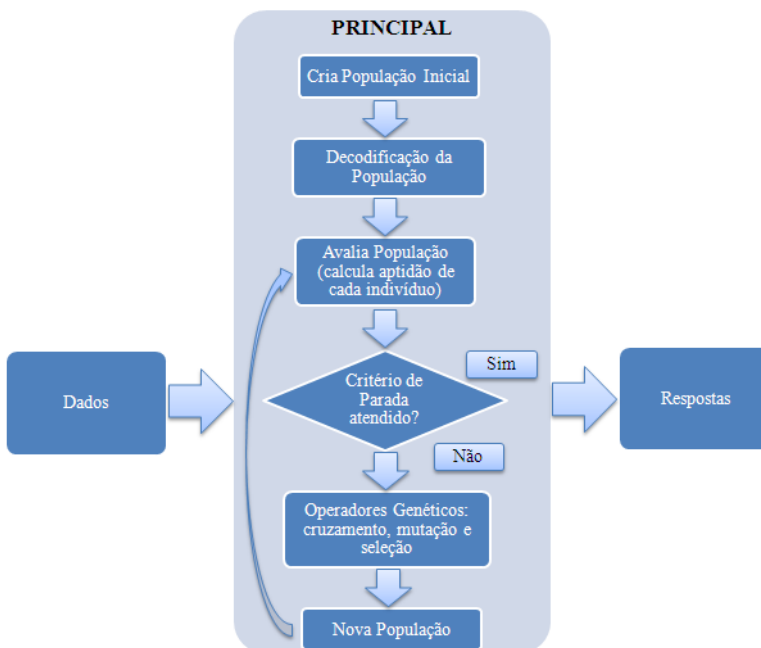


Figura 2 - Fluxograma de um algoritmo genético discreto .

Em um problema de otimização deve-se primeiramente definir a função objetivo e as variáveis de projeto escolhidas. Em algoritmos genéticos as restrições de igualdade e desigualdade são normalmente incorporadas à função objetivo fazendo-se uso do método de penalidades exterior exata. No caso de uso de algoritmos genéticos, define-se uma população inicial, sendo então determinado para cada indivíduo da população o valor associado à função objetivo. Os indivíduos são posteriormente ordenados de modo crescente (caso de minimização) de modo que o indivíduo mais apto da população fique em primeiro lugar.

No caso de algoritmos genéticos binários, Forrest (1993) expressa que cada indivíduo é representado por uma cadeia de dígitos binários, i.e., um conjunto de zeros e uns, pois no algoritmo genético binário é requerido que se faça uma codificação dos indivíduos da população em binário, uma vez que todos os operadores são definidos através de operações binárias. Adicionalmente, é necessário que se faça a decodificação para a avaliação de cada indivíduo com relação à função objetivo. Assim, cada indivíduo é representado por um "*string*" de binários é denominando um cromossomo, no qual cada dígito binário do "*string*" é referido como sendo um gene. Ao se fazer uma analogia entre o gene biológico com o gene numérico consegue-se aproximar o comportamento do algoritmo com o comportamento biológico. Este também é um ponto a ser destacado, pois é nele que se evidencia a diferença com o método dos algoritmos genéticos contínuos.

O próximo passo é a avaliação de cada indivíduo gerado na função objetivo. Nesse ponto imagina-se como a adaptação de várias espécies ou uma espécie com vários indivíduos com mutações genéticas distintas, expostas ao ambiente se comportam. Existirão espécies ou indivíduos que sentirão maiores dificuldades e outros, que se adaptarão facilmente às condições impostas. Esta é a proposta também no algoritmo genético, que consiste em avaliar cada indivíduo com relação à função mérito (objetivo) verificando-se sua aptidão e efetuando uma ordenação dos indivíduos de acordo com o seu mérito ou aptidão. A ordenação é feita do mais apto para o menos apto.

Uma vez obtida a ordenação dos indivíduos da população, verifica-se então se o critério de parada foi atingido. Caso isso não tenha ocorrido, uma nova geração de indivíduos é obtida, a partir da população atual via aplicação dos operadores binários relativos aos processos de seleção, cruzamento e mutação. Desta forma, introduz-se o primeiro operador, A seleção. Como resultado da seleção são obtidos

pares ou casais (pais) os quais através dos processos de cruzamento e da mutação geram novos indivíduos (filhos).

Visando a otimização da função objetivo pode-se imaginar que participarão do cruzamento apenas uma parte dos indivíduos, sendo estes os mais aptos. Pode-se associar isso ao comportamento natural observado em animais de várias espécies, já que muitos indivíduos menos aptos nem chegam à idade adulta, pois acabam morrendo pelas condições ambientais ou por predadores.

No cruzamento realizado no algoritmo genético binário as seqüências binárias geradas têm parcelas de contribuição de ambos os pais e estas substituem as seqüências dos indivíduos descartados anteriormente segundo Haupt et al(2004), conforme pode ser observado na Figura 3 abaixo.

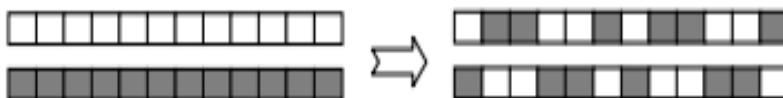


Figura 3 - Exemplo de cruzamento em algoritmo genético binário

Para a realização do cruzamento normalmente faz-se uma seleção dos indivíduos que participarão, conforme um comportamento social comum, entre os seres humanos, e de uma forma mais instintiva para os animais. Portanto, existem variadas formas de seleção para o cruzamento.

Pode-se imaginar que com esse tipo de cruzamento estaremos sempre limitados a uma área de busca determinada pela população inicial o que possivelmente pode acabar fazendo o algoritmo parar em um mínimo local. Para garantir a exploração de áreas distintas introduz-se o terceiro operador, a mutação. Este operador é responsável por inserir um material genético novo na nova geração, fazendo alguns indivíduos serem diferentes dos que o originaram. Este procedimento possibilita explorar áreas do domínio factível nas quais podem ser encontrados indivíduos mais aptos. A mutação pode ser exemplificada conforme as Figura 4 e Figura 5.

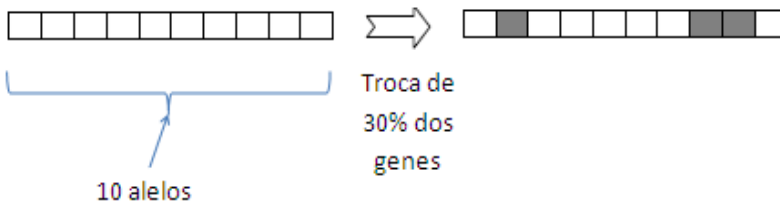


Figura 4 - Troca de genes no processo de mutação

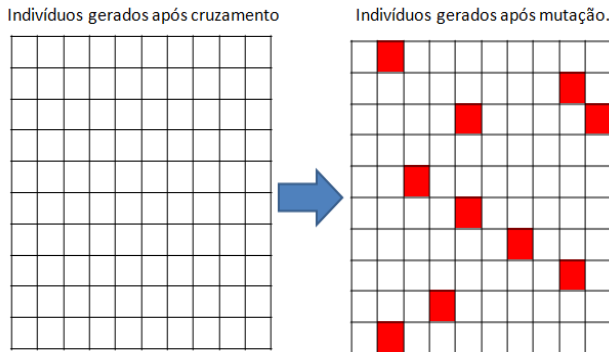


Figura 5 - Exemplo do processo de mutação em algoritmos genéticos

Terminada a geração de uma nova população inicia-se novamente o processo iterativo até que se obtenha o indivíduo mais apto conforme o critério de parada pré-estabelecido.

2.2.2 Algoritmos Genéticos Contínuos

Os algoritmos genéticos contínuos se assemelham em muitas coisas com os binários, conforme pode ser observado em sua estruturação na Figura 6. Porém, possuem as seguintes características que os diferenciam:

- Trabalham diretamente com números reais;
- Em suas estruturas não necessitam da codificação nem da decodificação dos indivíduos;
- A limitação da precisão das variáveis de projeto são as da máquina que está sendo utilizada;
- Requerem menor espaço para armazenamento das variáveis de projeto.

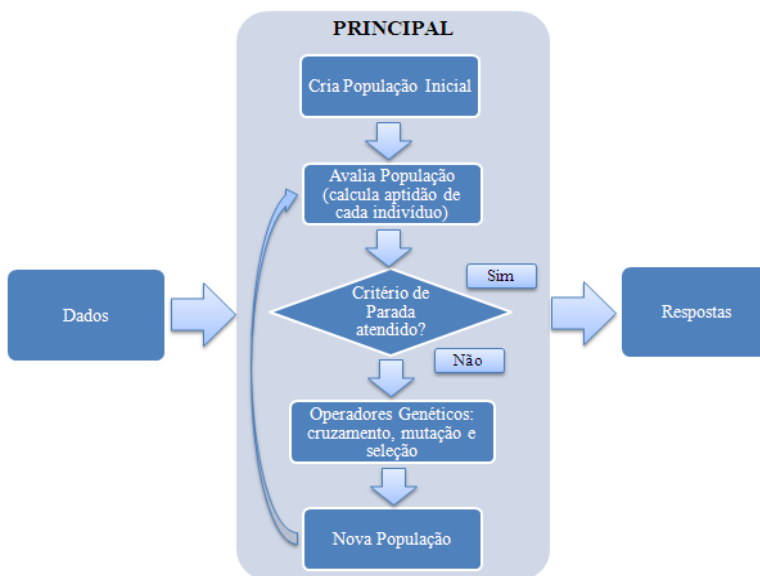


Figura 6 - Fluxograma de um algoritmo genético contínuo

2.2.2.1 Componentes de um Algoritmo Genético Contínuo

Esta seção tem o intuito de apresentar as estruturas dos componentes de um algoritmo genético contínuo, apresentados anteriormente na Figura 6. Segundo Haupt et al(2004) algumas nuances para a aplicação do método devem ser cuidadosamente consideradas.

➤ Variáveis e Função Objetivo

Um problema de otimização pode ser definido como segue.

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

sujeito às seguintes restrições:

1. Restrições do tipo caixa, ou laterais, dadas por

$$\bar{x}_i^{inf} \leq \bar{x}_i \leq \bar{x}_i^{sup}; \quad (2.2)$$

2. Restrições de desigualdade, dadas por

$$g_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r; \quad (2.3)$$

3. Restrições de igualdade, dadas por

$$h_s(\bar{x}) = 0, \quad s = 1, \dots, p. \quad (2.4)$$

Desta forma, para que se defina um problema de otimização através de um algoritmo genético contínuo primeiramente deve-se definir as variáveis de projeto, expressas como:

$$\bar{x}^{(j)} \in (x_1^{(j)}, \dots, x_N^{(j)}) \quad \bar{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^N, \quad (2.5)$$

na qual $j = 1, \dots, M$ em que:

N - é a quantidade de variáveis de projeto, ou genes;

M - é a quantidade de indivíduos, ou tamanho da população.

Observa-se então que cada indivíduo pode ser definido como um vetor das variáveis de projeto, como pode-se ver na Equação (3.6).

$$indivíduo^{(j)} \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \dots, x_N^{(j)} \right). \quad (2.6)$$

Haupt et al (2004) refere-se a esse indivíduo, i.e. elemento de \mathbb{R}^N como um cromossomo e a cada componente do elemento um gene associado ao indivíduo. Portanto, pode-se definir a população como sendo uma matriz de tamanho $M \times N$ da forma:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_N^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(M)} & \dots & x_N^{(M)} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Uma vez definida a população avalia-se cada indivíduo pela determinação da função objetivo, ou mérito. Desta forma, a função objetivo depende diretamente das variáveis de projeto, como fica explicitado na Equação (3.8).

$$f(\text{indivíduo}^{(j)}) = f(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \dots, x_N^{(j)}). \quad (2.8)$$

➤ População Inicial

O relato de Reeves et al (2002) menciona que existem duas grandes dificuldades na geração da população inicial. Uma é decidir o tamanho da população a ser utilizada e a outra é a definição do método pelo qual serão gerados os indivíduos.

Tratando-se de algoritmos genéticos, existem algumas formas de se compor a população inicial. Segundo Haupt et al (2004), duas das mais conhecidas são:

- População uniformemente distribuída;
- População aleatoriamente distribuída.

Exemplos dos dois tipos sugeridos podem ser observados nas figuras abaixo.

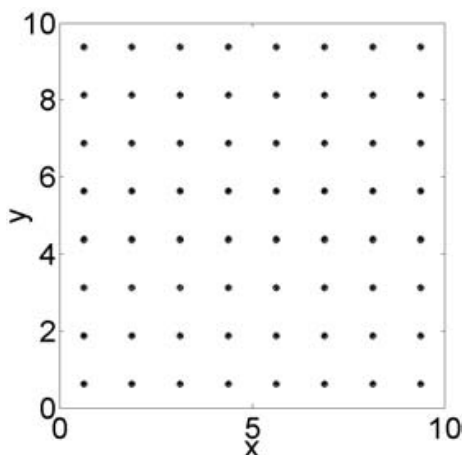


Figura 7 - População inicial uniformemente distribuída

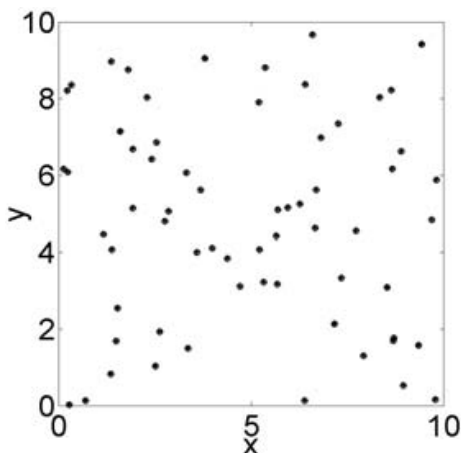


Figura 8 - População inicial aleatoriamente distribuída

Note que pode-se também obter uma população inicial combinando-se os dois métodos acima através do seguinte procedimento:

- Efetuação de uma partição uniforme do domínio em subdomínios;
- Em cada subdomínio, pode-se então escolher de forma aleatória um elemento deste subdomínio.

Como pode-se ver, diferentes estratégias podem ser propostas na geração de uma população inicial. O importante é que elas tenham representantes suficientes abrangendo todo o domínio de projeto. Neste ponto, fica claro a importância de se definir o tamanho da população, i.e., de se definir o que se entende como número suficiente de representantes.

Michalewicz (1996) trata com grande importância a escolha do tamanho da população utilizada. Relata também que caso a população seja muito grande pode-se ter um tempo de análise muito elevado, o que, possivelmente, inviabiliza o uso do método dos algoritmos genéticos.

Menciona ainda sobre o oposto, na qual uma população com um número muito pequeno de indivíduos é analisada, o que pode levar a uma convergência muito rápida do algoritmo, provavelmente obtendo como resultado um mínimo local.

O método utilizado neste trabalho foi o da geração da população inicial aleatoriamente distribuída, como sugerido por Michalewicz

(1996). Para que se pudesse gerar a população inicial foram realizadas as seguintes etapas:

1. Geração de números aleatórios $\lambda_i^{(j)}$ dentro do intervalo $[0,1]$;
2. Normalização dos pontos gerados dentro do intervalo $\left[\inf x_i^{(j)}, \sup x_i^{(j)} \right]$ pré estabelecido para cada variável de projeto, segundo a equação:

$$x_i^{(j)} = \inf x_i^{(j)} + \lambda_i^{(j)} \left(\sup x_i^{(j)} - \inf x_i^{(j)} \right), \quad (2.9)$$

em que

$\inf x_i^{(j)}$ é o limite inferior definido para o i -ésimo gene do j -ésimo indivíduo.

$\sup x_i^{(j)}$ é o limite superior definido para o i -ésimo gene do j -ésimo indivíduo.

$\lambda_i^{(j)}$ é o valor gerado aleatoriamente dentro do intervalo $[0,1]$ para o i -ésimo gene do j -ésimo indivíduo.

Note que a estratégia acima assegura que os genes de cada indivíduo satisfaçam as restrições laterais, ou de caixa.

Os tamanhos das populações iniciais utilizadas para cada problema investigado, foram baseados em resultados de experimentos realizados por Haupt et al (2004), os quais serão apresentados no Capítulo 4.

➤ Seleção

O operador seleção tem a função de dar a preferência mais acentuada para os indivíduos que obtiveram melhor performance com relação à função objetivo, de acordo com Sivaraj et al (2001).

A idéia é que dando a preferência para os indivíduos mais aptos, existe uma maior tendência de o algoritmo concentrar as buscas em uma menor região do domínio, acarretando na aceleração da convergência final do algoritmo.

Para que o operador seleção seja realizado deve-se primeiramente determinar o valor da função objetivo para cada indivíduo, assim como segue:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(M)} & \cdots & x_N^{(M)} \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{Bmatrix} f(\underline{x}^{(1)}) \\ \vdots \\ f(\underline{x}^{(M)}) \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Em um segundo passo ordena-se de forma crescente o vetor dos valores da função objetivo obtidos, como pode-se observar na equação (2.11).

$$\begin{Bmatrix} f(\underline{x}^{(1)}) \\ \vdots \\ f(\underline{x}^{(M)}) \end{Bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{Bmatrix} f(\underline{x}^{(1)})^{menor} \\ \vdots \\ f(\underline{x}^{(M)})^{maior} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Reordenado

Nesse ponto podem ser utilizadas as técnicas de ordeção que seguem:

- *Straight insertion method*;
- *Quicksort algorithm*;
- *Heapsort algorithm*;
- *Shell's method*.

Como os indivíduos estão associados ao vetor dos valores da função objetivo obtidos, uma vez ordenando o vetor deve-se ordenar a matriz dos indivíduos da mesma maneira. De posse da matriz da população de forma ordenada, descarta-se a parte da população menos apta.

$$\begin{Bmatrix} f(\underline{x}^{(1)})^{menor} \\ \vdots \\ f(\underline{x}^{(M)})^{maior} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_N^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(M)} & \cdots & x_N^{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Reordenado

Os estudos de caso realizados neste trabalho utilizaram uma taxa de seleção de 0,5. Isso significa descartar a metade dos indivíduos através do método de seleção, a parcela menos apta.

➤ **Seleção dos pares para cruzamento**

A seleção dos pares para cruzamento podem ser realizadas das maneiras mais diversas, porém todas partem de uma população já selecionada, a qual foi obtida anteriormente.

Os mecanismos de seleção são classificados por Sivaraj et al (2001) como tradicionais e alternativos. Alguns dos métodos de seleção tradicionais são apresentados a seguir:

- Métodos de seleção proporcionais
 - Seleção por roleta
 - Amostragem determinística
 - Amostragem remanescente estocástica
 - Seleção remanescente estocástica com substituição
 - Seleção remanescente estocástica sem substituição
 - Seleção universal estocástica
- Seleção através da classificação
 - Seleção por classificação linear
 - Seleção truncada
- Seleção por torneio
 - Seleção por torneio binário
 - Seleção por torneio aumentado
 - Seleção por torneio de Boltzmann
 - Seleção por torneio correlativo

Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo utilizando o método da seleção proporcional por roleta, cujas etapas são descritas, de acordo com Haupt et al (2004), a seguir:

- Determina-se a probabilidade para cada indivíduo de acordo com a sua posição de classificação na lista ordenada, com relação à função objetivo, da seguinte forma:

$$P_k = \frac{\alpha - k + 1}{\sum_{k=1}^{\alpha} k} \quad (2.13)$$

na qual $\alpha = \frac{M}{2}$ (caso de uma taxa de seleção de 50%),

sendo:

M - o número de indivíduos da população;

k - a posição do indivíduo na lista ordenada, utilizando como critério o valor da função objetivo. Sendo o primeiro elemento da lista o mais apto, i.e. o indivíduo com o menor valor da função objetivo e o último o de maior valor da função objetivo;

P_k - a probabilidade de seleção de cada indivíduo.

- Associa-se a cada indivíduo um intervalo

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= [0, P_1]; \\ \Pi_2 &= [P_1, P_1 + P_2]; \\ &\vdots \\ \Pi_\alpha &= \left[\sum_{k=1}^{\alpha} P_k, 1 \right],\end{aligned}\tag{2.14}$$

em que a união dos intervalos satisfaz a propriedade:

$$[0, 1] = \cup \Pi_k.\tag{2.15}$$

- Gera-se dois números aleatoriamente dentro do intervalo $[0, 1]$;

$$\begin{aligned}\beta_j^p &\in [0, 1], \\ \beta_j^m &\in [0, 1].\end{aligned}\tag{2.16}$$

1. Avalia-se a qual intervalo os valores gerados pertencem;
2. Conforme o intervalo, determina-se os indivíduos que participarão do cruzamento.

$$\begin{aligned}
 \text{se } \beta_j^{(p)} \in \Pi_{k_1} &\rightarrow \bar{x}^{(p)} = \bar{x}^{(k_1)} \quad (\text{pai}), \\
 \text{se } \beta_j^{(m)} \in \Pi_{k_2} &\rightarrow \bar{x}^{(m)} = \bar{x}^{(k_2)} \quad (\text{mãe}).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Neste caso, o j -ésimo casal é tal que o pai e a mãe são dados pelos indivíduos (k_1) e (k_2) respectivamente.

Note que, neste algoritmo, existe a possibilidade de o pai e a mãe serem formados pelo mesmo elemento. Uma forma de resolver este problema é gerando um novo número randômico, $\beta_j^m \in [0,1]$, visando a determinação de uma mãe que seja distinta do pai.

Fica evidente também a possibilidade de se propor diferentes estratégias de seleção, possibilitando melhorar a performance do algoritmo genético, principalmente com relação ao aumento da taxa de convergência.

Note que o algoritmo assegura que quanto melhor for a classificação do indivíduo, com relação à sua performance, maior será a probabilidade deste ser selecionado para o cruzamento.

Formas mais simples de seleção consideram apenas os $\alpha = \frac{M}{2}$ (caso de uma taxa de seleção de 50%) indivíduos mais aptos na seleção, sendo os demais 50% dos indivíduos da população descartados. Este tipo de estratégia leva a uma maior taxa de convergência, porém a um mínimo local. Desta forma, podemos ver que a escolha do algoritmo de seleção depende do balanço entre o aumento da taxa de convergência do algoritmo, para o critério de parada utilizado, e do risco de se obter aproximações de mínimos locais. É sempre importante lembrar que o objetivo é sempre o de obter aproximações para o mínimo global do problema.

➤ Cruzamento

O cruzamento pode ser definido como o processo de recombinar dois indivíduos, aqui chamados pais, para originar dois novos indivíduos, denominados filhos, visando gerar uma nova população, conforme Sivanandam et al (2008).

Como houve um processo de seleção dos indivíduos formando novos casais, a tendência com o cruzamento é obter um enriquecimento da nova população com o passar das gerações.

No que se refere ao operador cruzamento existem diversas maneiras de implementá-lo, contudo cada método possui vantagens e desvantagens, o que dificulta a definição do operador cruzamento a ser utilizado.

O método mais simples para a realização do cruzamento é apresentado a seguir, no qual se determina um ponto de cruzamento e faz-se uma troca de genes a partir deste ponto, dando origem a dois novos indivíduos.

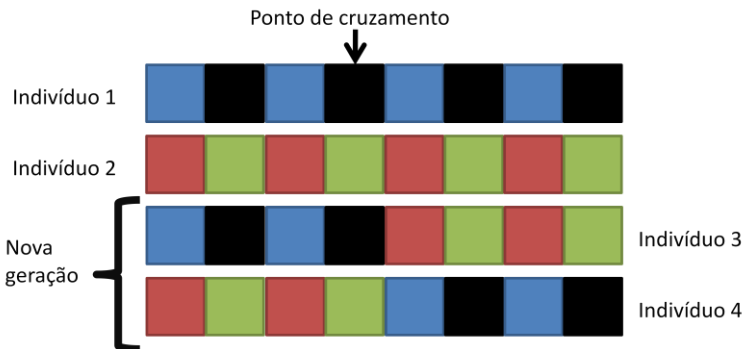


Figura 9 - Método mais simples para a realização do cruzamento.

A forma mais extrema de realizar o cruzamento pode ser observada na Figura 10, na qual decide-se qual indivíduo gerador contribuirá para cada indivíduo gerado.

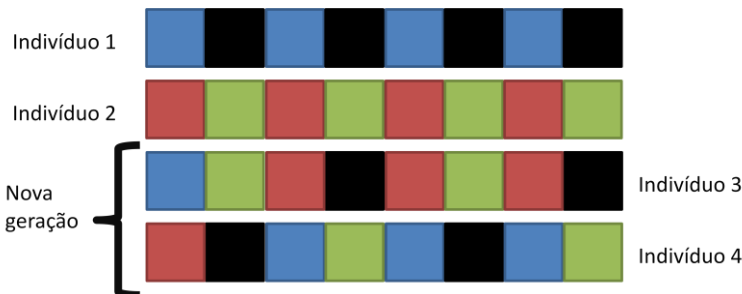


Figura 10 - Método mais extremo para a realização do cruzamento.

O problema com esses métodos é que não é inserida nenhuma informação totalmente nova, pois realizam apenas uma recombinação dos genes. Dessa forma o algoritmo fica completamente dependente do operador mutação para que se tenha um novo material genético.

Para que o algoritmo possua maior robustez e consiga dar origem a genes novos durante o operador cruzamento, faz-se com que nos pontos que se realizam o cruzamento se tenha contribuição dos dois indivíduos geradores, através de um método que combine os genes, conforme pode-se observar na Figura 11.

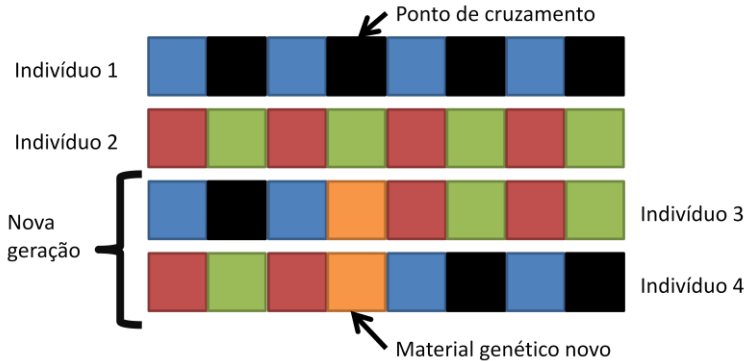


Figura 11 - Método de cruzamento com combinação de genes.

Algumas das formas de combinação de genes mais utilizadas são baseadas nos seguintes métodos:

- Método da mistura;
- Método heurístico;
- Método da extrapolação.

Estes três métodos tem uma forma similar de execução. Fazem-se cópias $\bar{x}^{(f1)}$ e $\bar{x}^{(f2)}$ dos indivíduos de origem, i.e., dos pais, $\bar{x}^{(p)}$ e $\bar{x}^{(m)}$, portanto:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(f1)} &= \left(x_1^{(p)}, \dots, x_N^{(p)}\right), \\ \bar{x}^{(f2)} &= \left(x_1^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}\right).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Escolhe-se um ponto ou mais para o cruzamento;

$$I_j = \text{ceiling}(\beta_j N) \quad \beta_j \in [0,1], \quad (2.19)$$

sendo β_j gerado aleatoriamente para cada cruzamento do j -ésimo casal

1. Utiliza-se as Equações (2.20), (2.21) e (2.22) de cada método para fazer combinações entre as variáveis nas posições escolhidas;

$$\text{Mistura} \begin{cases} x_{I_j}^{(f1)} = \beta_j x_{I_j}^{(m)} + (1 - \beta_j) x_{I_j}^{(p)} \\ x_{I_j}^{(f2)} = (1 - \beta_j) x_{I_j}^{(m)} + \beta_j x_{I_j}^{(p)} \end{cases}, \quad (2.20)$$

$$\text{Heurístico} \begin{cases} x_{I_j}^{(f1)} = \beta_j^1 (x_{I_j}^{(m)} - x_{I_j}^{(p)}) + x_{I_j}^{(m)} \\ x_{I_j}^{(f2)} = \beta_j^2 (x_{I_j}^{(p)} - x_{I_j}^{(m)}) + x_{I_j}^{(p)} \end{cases}, \quad (2.21)$$

No caso do indivíduo $x_{I_j}^{(fi)}$ não pertencer ao domínio factível, novos números randômicos β_j^i são gerados até obter-se um indivíduo factível.

$$\text{Extrapolação} \begin{cases} x_{I_j}^{(a)} = 0,5x_{I_j}^{(m)} + 0,5x_{I_j}^{(p)} \\ x_{I_j}^{(b)} = 1,5x_{I_j}^{(m)} - 0,5x_{I_j}^{(p)} \\ x_{I_j}^{(c)} = -0,5x_{I_j}^{(m)} + 1,5x_{I_j}^{(p)} \end{cases}. \quad (2.22)$$

Neste caso, os filhos $x_{I_j}^{(f1)}$ e $x_{I_j}^{(f2)}$ são escolhidos como sendo os indivíduos mais aptos. Qualquer indivíduo $x_{I_j}^{(k)}$, $k = a, b, c$ não pertencente ao domínio factível é descartado neste procedimento.

2. Substitui-se os valores obtidos nos indivíduos da nova geração, tal como:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(f1)} &= \left(x_1^{(p)}, \dots, x_{I_j-1}^{(p)}, x_{I_j}^{(f1)}, x_{I_j+1}^{(m)}, \dots, x_N^{(m)} \right), \\ \bar{x}^{(f2)} &= \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{I_j-1}^{(m)}, x_{I_j}^{(f2)}, x_{I_j+1}^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right),\end{aligned}\tag{2.23}$$

dando origem a dois novos indivíduos para a próxima geração.

O método utilizado para o desenvolvimento do procedimento de otimização proposto foi um com uma alteração simples ao demonstrado por Haupt et al (2004), o qual pode ser descrito como um cruzamento com troca de variáveis e a utilização do método da mistura no ponto de corte. As etapas da rotina desenvolvida são descritas da forma que segue:

1. Determina-se os vetores dos indivíduos geradores $\bar{x}^{(p)}$ e $\bar{x}^{(m)}$ os quais dão origem aos vetores $\bar{x}^{(f1)}$ e $\bar{x}^{(f2)}$.

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(p)} &= \left(x_1^{(p)}, \dots, x_N^{(p)} \right), \\ \bar{x}^{(m)} &= \left(x_1^{(m)}, \dots, x_N^{(m)} \right).\end{aligned}\tag{2.24}$$

2. Gerando um número aleatório β_j dentro do intervalo $[0,1]$, estabelece-se o ponto de corte como segue:

$$I_j = \text{ceiling}(\beta_j N) \quad \beta_j \in [0,1],\tag{2.25}$$

a qual β_j é gerado aleatoriamente para cada cruzamento realizado.

3. Aplica-se o método da mistura na variável selecionada

$$\begin{aligned}x_{I_j}^{(f1)} &= \left(1 - \gamma_j^{(f1)}\right) x_{I_j}^{(p)} + \gamma_j^{(f1)} x_{I_j}^{(m)}, \\x_{I_j}^{(f2)} &= \left(1 - \gamma_j^{(f2)}\right) x_{I_j}^{(p)} + \gamma_j^{(f2)} x_{I_j}^{(m)}, \\ \gamma_j^{(fi)} &\in [0,1],\end{aligned}\tag{2.26}$$

em que $\gamma_j^{(fi)}$ é determinado aleatoriamente para cada indivíduo a ser gerado, o que difere do método proposto por Haupt et al (2004).

4. Dando origem aos vetores que farão parte da próxima geração, com o seguinte formato:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(f1)} &= \left(x_1^{(p)}, \dots, x_{I-1}^{(p)}, x_I^{(f1)}, x_{I+1}^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}\right), \\ \bar{x}^{(f2)} &= \left(x_1^{(m)}, \dots, x_{I-1}^{(m)}, x_I^{(f2)}, x_{I+1}^{(p)}, \dots, x_N^{(p)}\right).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Os quatro métodos descritos anteriormente tem como característica positiva a inserção de uma variável completamente nova através do operador cruzamento, no ponto de corte I_j . Por não se limitar a fazer apenas trocas simples de variáveis do indivíduo pai com o mãe, como é efetuado nos algoritmos genéticos com codificação binária, espera-se um comportamento melhor da rotina, uma vez que não depende apenas do operador mutação para a atribuição de novos valores para as variáveis de projeto, segundo Haupt et al (2004).

➤ **Mutação**

Uma das formas de aumentar a probabilidade de se obter um mínimo global é pela introdução do operador mutação. Com a aplicação do operador mutação podemos obter gerações mais dispersas com relação ao domínio factível o que possibilita a busca por um mínimo global. Em suma, este operador possibilita ao algoritmo analisar diferentes regiões do domínio de forma mais aleatória e abrangente.

Para que seja realizada a mutação primeiramente deve-se definir um valor para a taxa de mutação desejada, a qual determinará quantos indivíduos e variáveis de projeto da nova geração serão alterados.

A forma desenvolvida para a aplicação do operador mutação no algoritmo proposto, pode ser descrita como:

1. Determina-se o número total de variáveis de projeto existentes na população:

$$N_{TOT} = MN, \quad (2.28)$$

na qual

M é o número total de indivíduos;

N é o número total de variáveis;

2. Estabelece-se o número de variáveis que sofrerão mutação;

$$N_{mut} = ceiling(\mu N_{TOT}), \quad (2.29)$$

na qual

μ é a taxa de mutação

$ceiling(\circ)$ - é uma função para determinar o maior número inteiro abaixo do número determinado por (μN_{TOT}) .

3. Gera-se números aleatórios para a determinação dos vetores da colunas (C) e linhas (L) que serão mudados;

$$\begin{aligned} I_j^C &= ceiling\left(\gamma_j^C N\right) & \gamma_j^C &\in [0,1], \\ I_j^L &= ceiling\left(\gamma_j^L \frac{M}{2}\right) + \frac{M}{2} & \gamma_j^L &\in [0,1], \end{aligned} \quad (2.30)$$

para $j = 1, N_{mut}$.

4. Determina-se os valores que serão impostos pelo operador mutação, através da combinação convexa utilizando-se números $\lambda_{I_j^C}^{I_j^L}$ gerados aleatoriamente para cada variável a ser modificada, da seguinte forma:

$$x_{I_j^C}^{I_j^L} = x_{I_j^C}^{inf} + \lambda_{I_j^C}^{I_j^L} \left(x_{I_j^C}^{sup} - x_{I_j^C}^{inf} \right). \quad (2.31)$$

5. Substitui-se cada variável $x_{I_j^C}^{I_j^L}$ nas devidas posições

$$\left[I_j^L, I_j^C \right]. \quad (2.32)$$

➤ Critério de parada

Os critérios de convergência, i.e. condições de parada, adotados em algoritmos genéticos podem diferir de outras abordagens de otimização. Alguns desses critérios são apresentados a seguir, conforme Sivanandam et al(2008).

Condições de parada:

- Número máximo de gerações;
- Tempo máximo de otimização;
- Valor da função objetivo inalterado durante um número de iterações pré-definido;
- Valor da função objetivo inalterado durante um tempo de otimização pré-definido.

Critérios de parada:

- Melhor indivíduo;
- Pior Indivíduo;
- Somatório dos valores das funções objetivo;
- Média dos valores das funções objetivo.

Para a realização das análises deste trabalho foram utilizados duas condições de parada que são:

- (i) O número máximo de gerações obtidas, o qual garante que a rotina desenvolvida pare após um determinado número de iterações, independentemente da convergência do problema proposto.
- (ii) A verificação se o valor da função objetivo permanece inalterado durante um determinado número de gerações, i.e. número de iterações pré-definido.

3 COMPÓSITOS LAMINADOS

3.1 INTRODUÇÃO

O material compósito pode ser definido como um material constituído de duas fases visíveis a nível macroscópico e não solúveis uma na outra. De acordo com Callister Jr (1985) estes materiais podem ser classificados de acordo com as seis categorias que seguem:

1. Compósitos granulares;
2. Compósitos de fibras descontínuas;
3. Compósitos de fibras contínuas;
4. Compósitos de matriz polimérica;
5. Compósitos de matriz metálica;
6. Compósitos carbono /carbono.

No presente trabalho propõe-se analisar estruturas em materiais classificados dentro de compósitos de matriz polimérica. Por definição, este tipo de material é constituído por duas fases, sendo a primeira uma matriz polimérica e a segunda a fase de reforço, que são as fibras. Como exemplo podem ser citadas a de carbono, vidro, boro e aramida.

À primeira vista, somente as fibras desempenham um papel importante na constituição dos materiais compósitos de matriz polimérica, pois são a fase de reforço. No entanto a matriz também tem funções importantes. Bryan (1999) explicitou algumas funções que a matriz deve desempenhar:

- Manter as fibras juntas e alinhadas;
- Garantir que uma fibra estará isolada uma da outra;
- Proteger as fibras contra prováveis danos mecânicos e ataques ambientais;
- Aumentar a tenacidade do compósito, pois conforme se melhora a qualidade da aderência da matriz com as fibras essa propriedade tende a aumentar.

No entanto, trabalhar com compósitos de matriz polimérica ainda não define o tipo de material que se deseja trabalhar, uma vez que a fase de reforço, neste caso as fibras utilizadas, podem ser classificadas como

curtas, longas, orientadas ou não, como exemplos podem-se visualizar as Figuras 12, 13 e 14, que seguem.

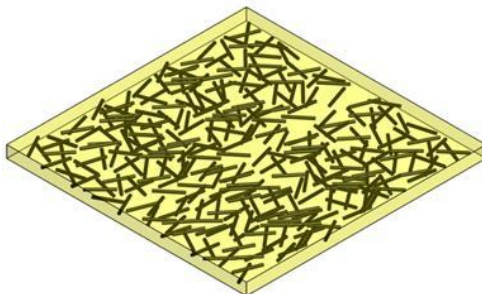


Figura 12 - Fibras curtas não orientadas.

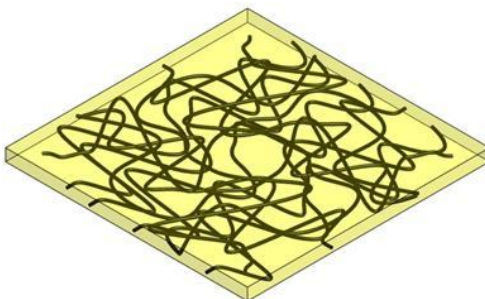


Figura 13 - Fibras longas não orientadas.

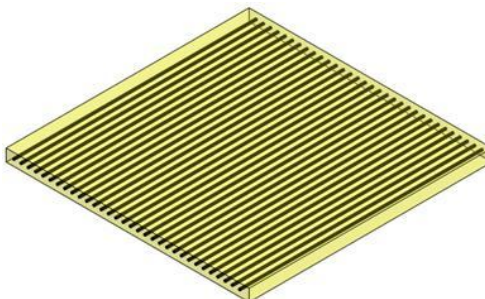


Figura 14 - Fibras longas orientadas.

Nesta dissertação os compósitos laminados de matriz polimérica utilizados são os de fibras longas orientadas, sendo as estruturas analisadas compostas de várias lâminas sobrepostas com diferentes orientações, definindo assim as propriedades dos laminados. Uma particularidade dos laminados de fibras longas orientadas é a grande

diferença de propriedades mecânicas entre a direção das fibras e as demais direções. Pode-se imaginar que esse é um problema para a adequação estrutural do material aos problemas de engenharia. Porém isso se torna o ponto positivo da utilização desses materiais, pois pode-se adequar o compósito à solicitação de projeto. Por este motivo os materiais compósitos têm se tornado uma alternativa cada vez mais comum na fabricação de componentes estruturais, de acordo com Costa et al. (1998).

As possibilidades de combinações e arranjos com materiais compósitos são as mais variadas, conforme abordado anteriormente. Por tal motivo, pode-se imaginar que a variação das propriedades mecânicas também é alta.

Portanto, para que se possa determinar as propriedades mecânicas de um laminado, deve-se primeiramente conhecer as propriedades das lâminas que o constituem. O modelo utilizado para a determinação das propriedades do laminado é a teoria da lâmina equivalente, a qual considera que na interface das lâminas existe adesão perfeita. Por consequência, os deslocamentos e as deformações são admitidos contínuos na espessura do laminado. Desta forma atribui-se ao material desenvolvido a parcela de contribuição de cada lâmina.

Por sua vez as lâminas têm as propriedades equivalentes determinadas a partir das propriedades dos componentes que as formam. Isso significa que o material compósito laminar é tratado como homogêneo e anisotrópico, sendo essas as primeiras hipóteses consideradas.

Conforme demonstrada a importância das propriedades mecânicas das lâminas, é possível imaginar que, por se tratar de um material anisotrópico a dificuldade enfrentada para a determinação das propriedades mecânicas de um laminado são muito maiores se comparada à de um material homogêneo isotrópico.

Existem vários métodos para se determinar as propriedades mecânicas de uma lâmina. A regra da mistura é uma delas. Porém os ensaios experimentais são mais comumente utilizados por apresentarem maior confiabilidade. Para que se possa conhecer todas as propriedades mecânicas necessárias para a realização de cálculos estruturais deve-se realizar uma variedade de ensaios mecânicos, sendo eles:

- Ensaio de tração;
- Ensaio de compressão;
- Ensaio de cisalhamento;

- Ensaio de cisalhamento normal ao plano (*short beam*);
- Ensaio de cisalhamento interlaminar.

Uma vez que se conheça as propriedades de todas as lâminas que compõem o laminado é possível se determinar o comportamento mecânico deste.

3.2 LÂMINA

Segundo Barbosa (2008), uma lâmina é uma camada de fibras unidirecionais ou fibras tecidas embutidas em uma matriz. Partindo deste princípio a determinação da equação constitutiva da lâmina parte das seguintes hipóteses:

-A lâmina é:

- homogênea;
- ortotrópica;
- elástica;
- linear;
- livre de qualquer tensão interna ou térmica;
- não existem vazios.

-Das fibras:

- propriedades mecânicas uniformes;
- nenhuma variação nos diâmetros;
- paralelas;
- contínuas;
- espaçamento entre fibras regular.

-Da matriz:

- homogênea;
- isotrópica;
- elástica;
- linear.

-Da interface:

- perfeita adesão entre matriz e fibra.

As propriedades mecânicas de uma lâmina podem ser determinadas através de ensaios mecânicos ou outros métodos que utilizam-se da regra da mistura e de fórmulas empíricas, mas que mostram-se menos precisos.

Os eixos de ortotropia do material podem ser considerados como: a direção longitudinal à fibra, a direção transversal à fibra no plano da lâmina e a direção perpendicular ao plano da lâmina. Esses eixos coincidem com o sistema de coordenadas ortogonal definido para cada lâmina, conforme pode-se observar na Figura 15. Serão as propriedades materiais nestas direções que definirão o comportamento mecânico do material compósito proposto.

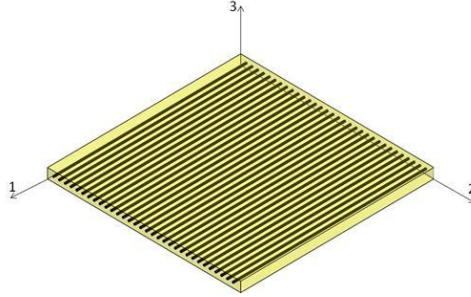


Figura 15 - Representação dos eixos de ortotropia para uma lâmina.

Na abordagem de Jones (1999) utilizando as propriedades materiais definidas no sistema de eixos visto anteriormente, a matriz de flexibilidade que relaciona tensão e deformação de um material ortotrópico é definida como na equação (3.1)

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{matrix} \right\}. \quad (3.1)$$

Na forma compacta fica

$$\{\varepsilon^L\} = [S^L] \vec{\sigma}^L, \quad (3.2)$$

sendo L um índice que indica o sistema de eixos de ortotropia da lâmina e satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} &= \frac{\nu_{31}}{E_3}, \\ \frac{\nu_{23}}{E_2} &= \frac{\nu_{32}}{E_3}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Com as simplificações impostas e supondo adicionalmente ser o material transversalmente isotrópico, pode-se definir o comportamento mecânico da lâmina com apenas cinco constantes materiais de acordo com os eixos de ortotropia apresentados na Figura 15, as quais são apresentadas, como:

- E_1 - módulo de elasticidade na direção 1;
- E_2 - módulo de elasticidade nas direções 2 e 3 ($E_2 = E_3$);
- G_1 - módulo de cisalhamento nos planos que transpassam a fibra (1-2 ou 1-3) ($G_1 = G_{12} = G_{13}$);
- G_2 - módulo de cisalhamento no plano que é possível transpassar somente a matriz (2-3) ($G_2 = G_{23}$);
- ν_1 - coeficiente de Poisson referente à deformação nas direções 2 ou 3 causada por uma solicitação na direção 1 ($\nu_1 = \nu_{21} = \nu_{31}$);
- ν_2 - coeficiente de Poisson referente à deformação ($\nu_2 = \nu_{23}$).

Portanto, a matriz de flexibilidade na forma simplificada fica:

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_2} & -\frac{\nu_1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{matrix} \right\}. \quad (3.4)$$

Para que se obtenha a matriz constitutiva $[Q^L]$ é necessário que se faça a inversão da matriz constitutiva inversa $[S^L]$. Assim, a relação constitutiva de uma lâmina pode ser expressa como:

$$\bar{\sigma}^L = [Q^L] \bar{\varepsilon}^L, \quad (3.5)$$

em que

$$[Q^L] = [S^L]^{-1}. \quad (2.6)$$

3.3 LAMINADO

Segundo Gibson (1994) a utilização estrutural mais comum consiste na composição de lâminas em diferentes direções (laminado), uma vez que uma lâmina não possui boas propriedades mecânicas nas direções transversais à direção da fibra.

Desta forma, primeiramente define-se um composto laminado como um agrupamento de diversas lâminas as quais, na maioria das vezes, encontram-se orientadas em direções distintas (Pereira, 2004). E posteriormente se estabelece um sistema de coordenadas de referência global para o laminado o qual pode ser observado na Figura 16.

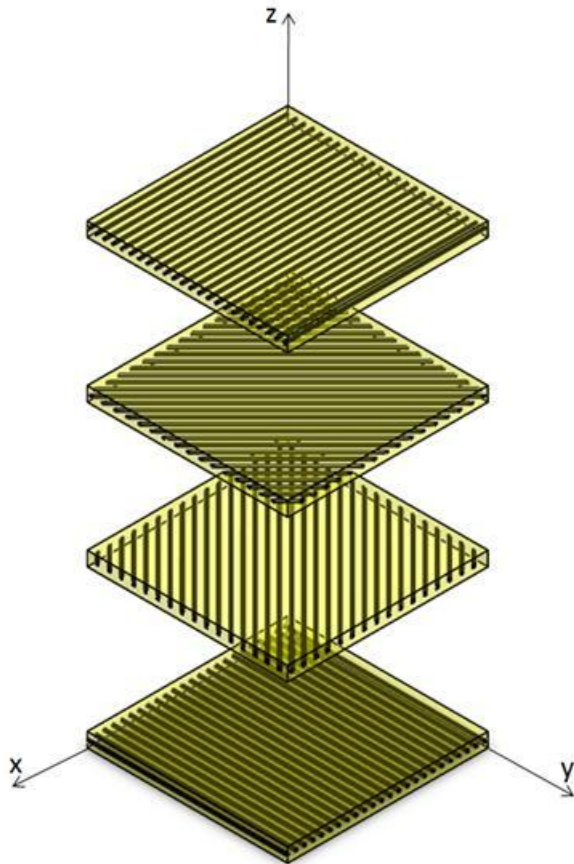


Figura 16 - Sistema de eixos de ortotropia e de referência

Conforme as orientações estabelecidas, a contribuição de cada lâmina nas direções do sistema de referência global é determinada fazendo-se a rotação das deformações e tensões obtidas no sistema local (lâmina) para o global (laminado). Esse procedimento é mostrado nas Equações (3.7), (3.8) e (3.9).

$$\vec{\sigma} = [T_{\sigma}] \vec{\sigma}^L \quad \text{ou} \quad \vec{\sigma}^L = [T_{\sigma}]^{-1} \vec{\sigma} \quad (3.7)$$

e

$$\vec{\varepsilon} = [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^L \quad \text{ou} \quad \vec{\varepsilon}^L = [T_\varepsilon]^{-1} \vec{\varepsilon}, \quad (3.8)$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= [T_\sigma] \vec{\sigma}^L, \\ &= [T_\sigma] [Q^L] \vec{\varepsilon}^L, \\ &= [T_\sigma] [Q^L] [T_\varepsilon]^{-1} \vec{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

então,

$$\vec{\sigma} = [Q] \vec{\varepsilon}, \quad (3.10)$$

na qual

$$[Q] = [T_\sigma] [Q^L] [T_\varepsilon]^{-1}, \quad (3.11)$$

Cabe destacar que

- $\vec{\sigma}$ é o vetor das componentes de tensão;
- $\vec{\varepsilon}$ é o vetor das componentes de deformação;
- $[Q]$ é a matriz constitutiva no sistema de referência global;
- $[T_\sigma]$ é a matriz de rotação relacionada à tensão;
- $[T_\varepsilon]$ é a matriz de rotação relacionada à deformação.

As matrizes de rotação são dadas pelas Equações (3.12) e (3.13).

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

e

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Note que θ é o ângulo entre os sistemas que se está trabalhando, no caso os sistemas de ortotropia e o sistema de coordenadas de referência global, visualizados na Figura 16. Ao inverter as matrizes $[T_\sigma]$ e $[T_\varepsilon]$, percebe-se que:

$$\begin{aligned} [T_\varepsilon]^{-1} &= [T_\sigma]^T \\ \text{e} \\ [T_\sigma]^{-1} &= [T_\varepsilon]^T, \end{aligned} \quad (3.14)$$

por consequência

$$\vec{\sigma} = [Q] \vec{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

na qual

$$[Q] = [T_\sigma][Q^L][T_\sigma]^T. \quad (3.16)$$

Sendo o material ortotrópico, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

em que

$$[Q] = [T_\sigma][Q^L][T_\sigma]^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

O mesmo procedimento realizado para a relação constitutiva inversa, denominada por $[S] = [Q]^{-1}$, resulta em:

$$[S] = [T_\varepsilon][S^L][T_\varepsilon]^T. \quad (3.19)$$

Assim

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

sendo $[S]$ da forma

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

O que resulta, na equação constitutiva associada à k -ésima lâmina, dada por:

$$\vec{\sigma}^{(k)} = [Q]^{(k)} \vec{\varepsilon}^{(k)}. \quad (3.22)$$

3.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

O estado plano de tensões é definido por Hibbeller (2010) como a simplificação de um estado geral de tensões, na qual se um corpo não tiver solicitações normais e cisalhantes à superfície externa, conseqüentemente as tensões normais e de cisalhamento terão suas magnitudes iguais a zero, portanto na face oposta, para que o corpo permaneça em equilíbrio, as tensões também são nulas, definindo-se um estado plano de tensões para este corpo.

Conforme Azevedo (1996) pode-se considerar em estado plano de tensões qualquer corpo que venha a ter uma das condições apresentadas a seguir:

- ausência de forças de superfície;
- corpo de espessura muito pequena com relação às outras dimensões;
- corpo simétrico com relação a um ponto médio;
- todas as ações simétricas em relação a um ponto médio.

Desta forma os laminados na maioria de suas aplicações se encaixam na teoria do estado plano de tensões por serem finos e sujeitos à tensões planas. Como resultado temos que $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \\ &= [S] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

podendo ser expressado como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

Percebe-se que a matriz constitutiva passa a depender de apenas 4 parâmetros materiais, são eles $\{E_1, E_2, \nu_1, G_1\}$.

Sob a condição de $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, por consequência

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

em que

$$\begin{Bmatrix} \tilde{C}_{11} \\ \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{16} \\ \tilde{C}_{22} \\ \tilde{C}_{26} \\ \tilde{C}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\ C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\ (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para que se possa incluir a influência das deformações cisalhantes transversais, deve-se adicionar a relação constitutiva que segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}, \quad (3.27)$$

na qual

$$\begin{aligned} C_{44} &= G_{23} , \\ &\text{e} \\ C_{55} &= G_{13} . \end{aligned} \quad (3.28)$$

No caso das tensões e deformações cisalhantes transversais,

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}, \quad (3.30)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} \\ \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{44} &= C_{44} \cos^2(\theta) + C_{55} \sin^2(\theta), \\ \tilde{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin(\theta) \cos(\theta), \\ \tilde{C}_{55} &= C_{44} \sin^2(\theta) + C_{55} \cos^2(\theta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os resultados combinados resultam em

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{16} & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{26} & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{16} & \tilde{C}_{26} & \tilde{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{44} & \tilde{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{45} & \tilde{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (3.33)$$

i.e.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = [\tilde{C}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (3.34)$$

3.5 ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES GENERALIZADAS

O comportamento mecânico do laminado pode ser determinado através da Equação (3.35), uma vez conhecidas as equações constitutivas das lâminas. Utilizou-se a Teoria de Primeira Ordem de Mindlin, a qual é uma variação da Teoria Clássica de Placas Laminadas (Kirchhoff-Love), mas que prevê as sollicitações de cisalhamento transversal, para estabelecer a relação entre deslocamento e deformação.

As hipóteses para a Teoria de Primeira Ordem de Placas Laminadas segundo Reddy (2004) são:

- Obtendo-se uma superfície média da placa estudada e imaginando linhas retas perpendiculares sobre toda esta superfície, essas permanecerão retas antes e após qualquer deformação;
- As normais transversais também não terão alongamento;
- As normais transversais podem sofrer rotação no ponto que fica sobre a superfície média, não necessitando permanecer perpendicular a ela.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (3.35)$$

Os carregamentos térmicos foram desconsiderados, pois não são objeto de estudo neste trabalho.

De acordo com Reddy (2004) para a definição das matrizes $[A]$, $[B]$, $[D]$ e $[F]$ presume-se que o material de cada lâmina obedeça a lei de Hooke, é ortotrópico e as coordenadas superior e inferior de cada lâmina no laminado são identificadas, conforme pode ser visto na Figura 17. Seguem algumas definições necessárias:

- número de lâminas : n
- espessura do laminado: h
- coordenada inferior de uma lâmina k : z_k
- coordenada superior de uma lâmina k : z_{k+1}

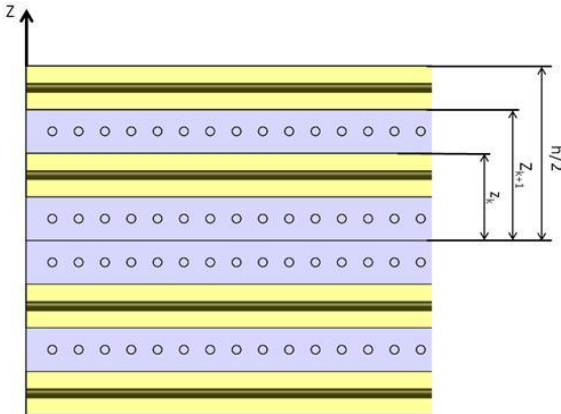


Figura 17 - Composição do laminado conforme as camadas.

A equação constitutiva para a k -ésima lâmina do composto é

$$\vec{\sigma}^{(k)} = [\tilde{C}]^{(k)} \vec{\varepsilon}^{(k)}, \quad (3.36)$$

sendo

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^T &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}, \\ \text{e} \\ \vec{\varepsilon}^T &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Da definição de esforços generalizados

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (3.38)$$

No entanto,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy} \\ \gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.40)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \\ &+ z \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k) \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots + \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{([z^{k+1}]^2 - [z^k]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para o cálculo dos momentos faz-se

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (3.43)$$

No entanto

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.44)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o + z \, \kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^o + z \, \kappa_{yy} \\ \gamma_{xy}^o + z \, \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

resultando em

$$\begin{aligned} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= z \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \\ &\quad + z^2 \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{(\bar{z}^{k+1}]^2 - \bar{z}^k]^2)}{2} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \dots \\ &\dots + \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{(\bar{z}^{k+1}]^3 - \bar{z}^k]^3)}{3} \right] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

A parcela dos esforços constituídos das forças cortantes é fornecida pela Equação (2.57).

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad (3.48)$$

na qual $k = 5/6$. Todavia,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (3.49)$$

resultando em

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = k \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k) \right] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (3.50)$$

Define-se, portanto

$$[A] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k); \quad (3.51)$$

$$[B] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{\left([z^{k+1}]^2 - [z^k]^2 \right)}{2}; \quad (3.52)$$

$$[D] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \frac{\left([z^{k+1}]^3 - [z^k]^3 \right)}{3}; \quad (3.53)$$

e

$$[F] = k \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} (z^{k+1} - z^k). \quad (3.54)$$

Portanto, define-se a matriz constitutiva generalizada da placa compósita como:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

4 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ALGORITMOS GENÉTICOS CONTÍNUOS (AGC)

Na determinação da estrutura ótima, se faz necessário avaliar a tensão máxima, deslocamento, entre outras respostas da estrutura em estudo. Os dados são necessários para a avaliação de cada indivíduo proposto.

O trabalho proposto utiliza uma ferramenta computacional como suporte na determinação do uso ótimo de estruturas. Para tal, é adotada a metodologia conforme mostra a Figura 18.

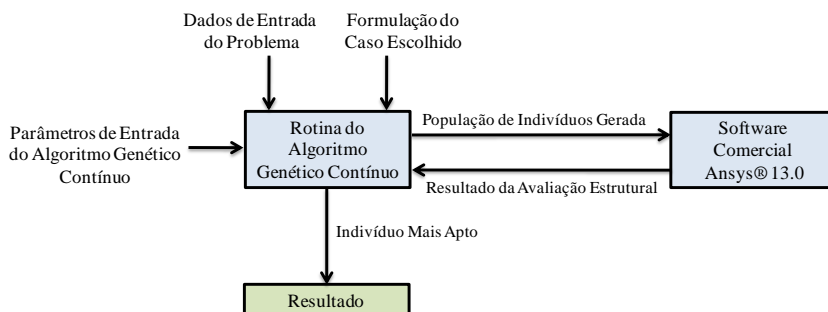


Figura 18 - Fluxograma do método proposto.

A Figura 18 caracteriza o método proposto neste trabalho, o qual se inicia com o desenvolvimento de uma rotina para gerar uma população de indivíduos (dados de entrada do software de análise estrutural), neste caso, espessuras de placas e/ou orientação de fibras que compõem a estrutura a ser estudada. Estes dados gerados na rotina do algoritmo genético contínuo (AGC) são enviados ao software de análise estrutural onde é feita a avaliação da população gerada, e posteriormente retornam dados à rotina do AGC onde os indivíduos são avaliados e classificados, segundo a Figura 6. Essa rotina se repete até que se tenha um indivíduo mais apto, conforme um critério de parada pré-determinado. Depois de identificado o indivíduo mais apto, o mesmo será tido como a solução ótima do problema.

Os parâmetros de entrada do AGC são: número de variáveis que serão otimizadas, tamanho da população, taxa de mutação, fração da população que será mantida, limites mínimos e máximos para cada variável, além do número máximo de iterações.

Já os dados de entrada do problema são: Propriedades dos materiais, posicionamento dos nós, número de elementos, propriedades geométricas da estrutura a ser otimizada, contatos utilizados e as condições de contorno (força, tipo de apoio, etc).

Por fim, a metodologia prevê a formulação de casos que tratam de algumas otimizações na estrutura que possam vir a ser feitas pelo AGC. Os casos estão descrito no Capítulo 5 o qual apresenta os resultados da dissertação.

4.1 DESCRIÇÃO DAS ETAPAS

4.1.1 Dados de Entrada da Estrutura a ser Otimizada e Formulação do Problema

A otimização estrutural passa primeiro pela boa formulação do problema físico. O software de análise estrutural requer alguns dados de entrada para a realização dos cálculos, são eles:

- Geometria da estrutura;
- Condições de contorno;
- Condições de simetria;
- Propriedades materiais;
- Carregamento.

A análise de estruturas fabricadas em material compósito necessitam além de informações das propriedades dos materiais, a orientação e as espessuras de cada lâmina, sendo todas elas necessárias para a determinação das propriedades do laminado.

A propriedade das lâminas utilizadas nos estudos apresentados no Capítulo 5 são mostradas na Tabela 2.

Tabela 2 - Propriedades mecânicas de três tipos de prepegs¹

<i>Prepeg</i>	<i>Carbono</i>	<i>Vidro</i>	<i>Aramida</i>
Fibra	AS	S-Glass	Kevlar 149
Matriz	3501 Epoxy	Epoxy	Epoxy
Forma	UD	UD	UD
Volume de fibra V_f	0,66	0,50	0,60
Densidade ρ (g/cm³)	1,6	2,00	1,38
Módulo de Elasticidade	138	43	87
Longitudinal E₁ (GPa)			
Módulo de Elasticidade E₂ (GPa)	8,96	8,9	5,5
Módulo de Elasticidade Transversal G₁₂ (GPa)	7,10	4,5	2,2
Coefficiente de Poisson ν_{12}	0,30	0,27	0,34
Resistência à tração longitudinal (MPa)	1447	1280	1280
Resistência à compressão longitudinal (MPa)	1447	690	335
Resistência à tração transversal (MPa)	51,7	49	30
Resistência à compressão transversal (MPa)	206	158	158
Resistência ao cisalhamento S₁₂ (MPa)	93	69	49

Fonte: Pinheiro, 2010.

Os dados de entrada apresentados são utilizados para o dimensionamento estrutural de acordo com o problema físico a ser estudado. Para tal, o software comercial utiliza o método de elementos finitos, que gera os resultados avaliados posteriormente na função objetivo.

No item 4.2.2 é abordada a metodologia para criação e parametrização do algoritmo genético contínuo, foco principal da presente dissertação.

¹Prepeg é um tecido pré-impregnado de resina e fibras e armazenado de forma a poder ser utilizado mais tarde através da sobreposição de várias camadas.

4.1.2 Criação da Rotina do Algoritmo Genético e Definição de Parâmetros

Com base na análise estrutural descrita anteriormente, e de acordo com o fluxograma padrão de algoritmos genéticos contínuos apresentado na Figura 19, é possível criar um algoritmo de otimização estrutural.

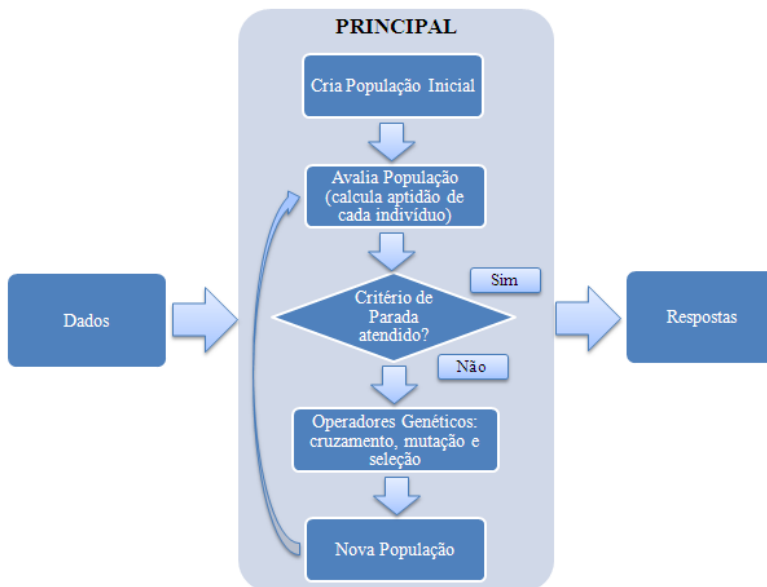


Figura 19 - Fluxograma de um algoritmo genético contínuo

Na parametrização de AGC faz-se necessário a definição de alguns parâmetros como a taxa de mutação, o tamanho da população e taxa de seleção, descritos no Capítulo 3.

Haupt R. L (1998) faz extensas comparações do desempenho de algoritmos genéticos em função do tamanho das amostras e da taxa de mutação, bem como de alguns outros parâmetros. O objetivo foi encontrar a resposta correta de um problema qualquer com o menor número de avaliações da função custo possível.

Como resultado da análise observou-se que a taxa de cruzamento (*crossover*), método de seleção (roleta ou torneio), e o tipo de cruzamento não eram muito importantes. No entanto, o tamanho da

população e a taxa de mutação têm um impacto significativo sobre a capacidade do algoritmo genético em encontrar um mínimo aceitável.

Com referência ao trabalho de Haupt, e na busca por determinar os parâmetros de entrada do algoritmo genético contínuo, é proposto um estudo sobre taxas de mutação e tamanho de população. Esta análise visa estabelecer os parâmetros que forneçam um custo que tende ao ótimo das funções objetivos ao menor esforço computacional.

Na Tabela 3 estão apresentadas 5 funções utilizadas por Haupt para validação de seus conceitos testando algoritmos genéticos contínuos e binários. Os algoritmos genéticos foram executados 200 vezes de forma independente para 21 diferentes tamanhos de população e 21 taxas de mutação diferentes, até que fossem encontrados resultados ótimos aceitáveis de modo a possibilitar conclusões acerca dos parâmetros utilizados.

Nos algoritmos genéticos binários foram utilizados códigos de 12 bits para cada variável. O tamanho da população variou entre 8 e 88 com passo de 4 indivíduos, já a taxa de mutação variou de 0,01 a 0,041 em incrementos de 0,02. Desta forma, 441 combinações de taxas e mutação e tamanhos de mutação diferentes foram testadas em 200 rodadas independentes.

Tabela 3 - Tamanho ótimo da população e da taxa de mutação encontrados após 200 executadas independentes do algoritmo genético

	Função Teste	Tipo de Algoritmo Genético	N_{pop}	μ	Cruzamento
1	$x \cdot \text{sen}(4x) + 1,1 \cdot y \cdot \text{sen}(2y)$	Contínuo	20	0,27	Heurístico
		Binário	8	0,11	Uniforme
		Binário	8	0,11	Ponto Único
2	$y \cdot \text{sen}(4x) + 1,1 \cdot x \cdot \text{sen}(2y)$	Contínuo	12	0,23	Heurístico
		Binário	16	0,09	Uniforme
3	$100 \cdot (x^2 - 10 \cdot x - y + 30)^2 + (6 - x)^2$	Contínuo	16	0,37	Heurístico
		Binário	8	0,25	Uniforme
4	$y \cdot \sum_{n=1}^{10} (v_n - 5)^2$	Contínuo	8	0,05	Heurístico
		Binário	8	0,03	Uniforme
		Contínuo	8	0,33	Heurístico
5	$(y - 5) \cdot (x - 5)^2 + (5 - x) \cdot (y - 5)^2$	Contínuo	8	0,33	Heurístico
		Binário	8	0,07	Uniforme

Ao avaliar o estudo feito por Haupt R. L (1998) é possível concluir que em função da aplicação que se deseja otimizar são formuladas as funções objetivo, as quais podem avaliar fatores como: trabalho, tensão e minimização de massa ou volume.

Alguns destes aspectos estão descritos e formulados no Capítulo 5, no qual são apresentados os casos estudados no presente trabalho.

5 SIMULAÇÃO E RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE OTIMIZAÇÃO DO AGC

A verificação da funcionalidade do algoritmo foi feita com a aplicação deste em três casos propostos. O objetivo era validar o algoritmo e então estudar o comportamento deste variando os parâmetros da taxa de mutação e tamanho de população.

5.1 ETAPA DE VALIDAÇÃO DO ALGORITMO GENÉTICO CONTÍNUO

Para análise dos parâmetros de simulação do algoritmo genético contínuo são definidos no item 5.1.1, e posteriormente são descritas no item 5.1.2 as formulações dos casos simulados e em seguida, é feita a análise dos resultados.

5.1.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo

A primeira proposta para avaliação do funcionamento de todo o algoritmo elaborado foi uma placa engastada com uma força F na extremidade, sendo as variáveis a serem otimizadas as espessuras h_1 e h_2 , como pode ser visto na Figura 20.

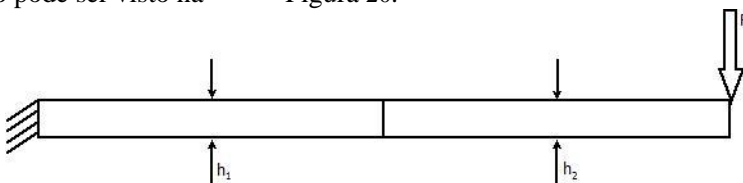


Figura 20 - Diagrama do problema proposto: viga engastada.

Os parâmetros utilizados na etapa de validação são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Parâmetros utilizados no AGC para validação

Parâmetro		Valor	Unidade
Número de variáveis que serão otimizadas		2	Qtd
Limite mínimo das variáveis		1	mm
Limite máximo das variáveis		40	mm
Tamanho da população inicial		20	Indivíduos
Taxa de mutação		20	%
Fração da população mantida (<i>crossover</i>)		50	%
Critério de Convergência	Número máximo de iterações	100	Iterações
	Número máximo de resultados iguais consecutivos	20	Iterações
	Tolerância para determinar resultados iguais consecutivos	1	%

5.1.2 Análise dos Resultados

O problema físico consiste em minimizar a *compliance*, como pode ser visto na função objetivo (5.1)

$$\min f(\bar{h}_i) = F \cdot \bar{u}(L) \quad (5.1)$$

sujeito a:

$$h_{inf} \leq h_i \leq h_{sup} \quad i = 1,2 \quad (5.2)$$

Nesse ponto, vale salientar que este tipo de limitante, h_{inf} e h_{sup} , para a geração da população é normalmente chamado de restrição de caixa ou lateral, pois antes mesmo de qualquer avaliação, limita-se a população a ser gerada.

\underline{Eu} é solução de:

$$[k(\bar{h}_i)] \cdot \bar{u} = \bar{F} \quad (5.3)$$

sendo:

- $[k(\bar{h})]$ a matriz de rigidez da estrutura;
- \bar{F} o vetor de forças nodais equivalentes;

- \bar{u} o vetor de deslocamentos nodais;
- \bar{h}_i as variáveis a serem otimizadas

Para a solução desse sistema foi utilizado o software comercial de análise estrutural *Ansys*.

A segunda proposta foi feita com base na primeira, impondo uma restrição de volume a até 30% do volume máximo. A descrição geral do problema segue.

Novamente, o problema físico consiste em minimizar a *compliance*, conforme a função objetivo (5.4), que segue:

$$\min f(\bar{h}_i) = F \cdot \bar{u}(L) \quad (5.4)$$

sujeito:

$$h_{\inf} \leq h_i \leq h_{\sup} \quad i = 1, 2 \quad (5.5)$$

$$vol \leq \alpha_0 \cdot v_0 \quad (5.6)$$

Cabe também destacar que:

- v_0 é o volume máximo;
- α_0 é o percentual de v_0 ;

Este problema é reformulado utilizando o método de penalidade exterior exata conforme equação (5.8).

$$\min f(\bar{h}_i) = F \cdot \bar{u}(L) + \frac{1}{\epsilon} \cdot |< vol - \alpha_0 \cdot v_0 >^+| \quad (5.8)$$

Em que: $\epsilon = 10^{-6}$

A malha gerada para o modelo em análise pode ser vista na Figura 21, observa-se que não se fez um grande refino, mas para uma primeira análise e avaliação do funcionamento do algoritmo proposto é de grande auxílio e, desta forma, se reduz o tempo de análise do modelo.

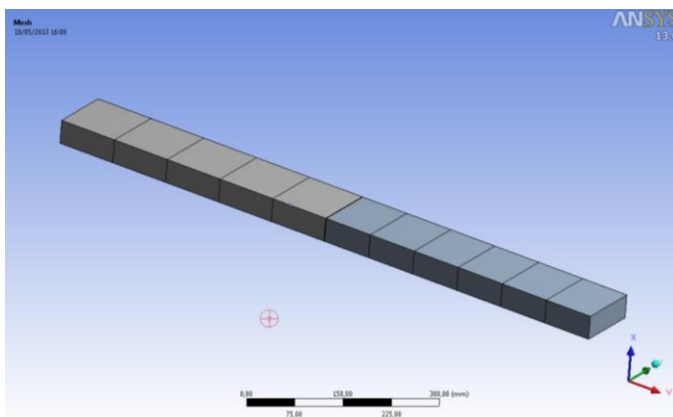


Figura 21 - Malha gerada para análise dos dois primeiros problemas

Os resultados obtidos após a otimização são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados das propostas apresentadas

Proposta	$h_1(\text{mm})$	$h_2(\text{mm})$	$V_0(\text{mm}^3)$	$V_f(\text{mm}^3)$
1	39,630	39,703	$4 \cdot 10^6$	$3,967 \cdot 10^6$
2	14,437	9,6838	$4 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^6$

Para o primeiro teste com o algoritmo, o esperado é que ao final da otimização se obtivesse valores próximos aos limites superiores das espessuras, 40 mm. Como pode ser visto na Tabela 5, os valores das espessuras encontradas se aproximaram do resultado ótimo, com isso, pode-se afirmar que existia a tendência de convergir corretamente, mas alguns outros parâmetros do algoritmo genético podem ter parado a rotina precocemente, como é o caso do tamanho da população, a taxa de mutação, o número de iterações máximo e a tolerância muito aberta.

Para esse caso a probabilidade de o tamanho da população e o número de iterações máximo terem influenciado no resultado final é grande, pois foram utilizados valores pequenos para que se pudesse verificar a funcionalidade do algoritmo com agilidade. Uma primeira abordagem sobre o tamanho da população pode ser visto em Goldberg (1989).

Contudo observa-se que o algoritmo teve um comportamento conforme o esperado para o caso. Esse tipo de resultado é importante para demonstrar que o algoritmo tem um comportamento confiável.

A segunda proposta foi feita com base na primeira, impondo uma condição de volume de até 30% do volume inicial, tal restrição foi imposta através da penalidade externa exata.

Para este caso esperava-se que a placa mais próxima ao engaste tivesse uma espessura maior que a placa mais próxima a força. O comportamento obtido após otimização, com as espessuras ótimas sendo respectivamente 14,4mm e 9,68mm, portanto, conforme o esperado.

Observa-se também que as restrições impostas para o modelo foram obedecidas, uma vez que o volume final corresponde a 30% do volume inicial.

5.2 APLICAÇÃO EM COMPÓSITOS LAMINADOS – ESTUDOS DE CASO

Caso	Descrição	Objetivo
1	Viga engastada em duas regiões, com uma força aplicada na extremidade. Realização de um estudo para a determinação da importância da taxa de mutação e tamanho de população.	Redução de trabalho externo, otimizando os ângulos de orientação das lâminas.
2	Estrutura de um vaso de pressão construída em material compósito, submetida a um carregamento de pressão interna constante.	Redução de trabalho externo, com critério de volume máximo.

5.2.1.Estudo de Caso 1: Placa engastada.

O problema proposto para o Caso 1 é uma placa engastada com uma força aplicada na extremidade, conforme pode ser observado na Figura 22. O material utilizado neste caso, foi a fibra de carbono Epoxy 3501 detalhada na Tabela 2.

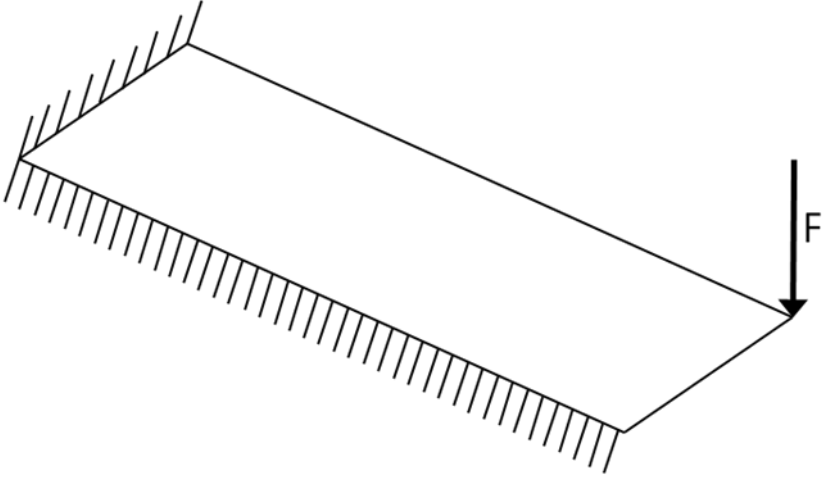


Figura 22 - Problema proposta para o Caso 1

O objetivo é a redução da *compliance* apenas mudando dois parâmetros do problema físico, que são as orientações das lâminas, a formulação do problema segue.

$$\min f(\bar{\theta}_i) = F \cdot \bar{u} \quad (5.11)$$

sujeito a:

$$\theta_{\inf} \leq \theta_i \leq \theta_{\sup} \quad i = 1,2 \quad (5.12)$$

Sendo \bar{u} é solução de:

$$[k(\bar{\theta}_i)] \cdot \bar{u} = \underline{F} \quad (5.13)$$

Onde:

- $[k(\bar{\theta}_i)]$ a matriz de rigidez da estrutura;
- \underline{F} o vetor de forças nodais equivalentes;
- \bar{u} o vetor de deslocamentos nodais;
- θ_i as variáveis a serem otimizadas

Foi proposto no modelo físico que seriam utilizadas apenas duas orientações de lâminas. A distribuição das devidas orientações pode ser vista na Figura 23, onde θ_1 e θ_2 são os parâmetros a serem otimizados.



Figura 23 - Distribuição das orientações das lâminas

5.2.1.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo

Os parâmetros utilizados no primeiro caso estudado são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Parâmetros utilizados no AGC para o Caso 1

Parâmetro		Valor	Unidade
Número de variáveis que serão otimizadas		2	Qtd
Limite mínimo das variáveis		0	°
Limite máximo das variáveis		360	°
Tamanho da população inicial		Variável	Indivíduos
Taxa de mutação		Variável	%
Fração da população mantida (<i>crossover</i>)		50	%
Critério de Convergência	Número máximo de iterações	100	Iterações
	Número máximo de resultados iguais consecutivos	16	Iterações
	Tolerância para determinar resultados iguais consecutivos	1	%

5.2.1.2 Análise dos Resultados

Durante as primeiras avaliações observou-se uma dependência dos resultados da otimização conforme os parâmetros utilizados no AGC, realizou-se um estudo onde observou-se a importância da utilização de parâmetros adequados.

Os estudos realizados por Haupt R.L.(1998) referenciado e abordado no Capítulo 4 serviram como base para os resultados a seguir.

Primeiramente foram objetos de estudo apenas a taxa de mutação e o tamanho da população, pois são os parâmetros que tem um impacto significativo sobre o comportamento do algoritmo genéticos, como referenciado anteriormente.

Para a realização do estudo, primeiramente foram fixados valores para todos os parâmetros segundo a tabela 6 e uma taxa de mutação de 20% e então avaliou-se as respostas para cada população proposta. Na Tabela 7 são apresentadas as populações utilizadas para este estudo.

Tabela 7- Tamanhos de população utilizados

Tamanho de população
8
12
16
20
24
28
32
48
56
64
96

De posse dos resultados gerou-se a Figura 24 onde são mostradas as relações *Compliance* X Tamanho da população e Número de Avaliações X Tamanho da População.

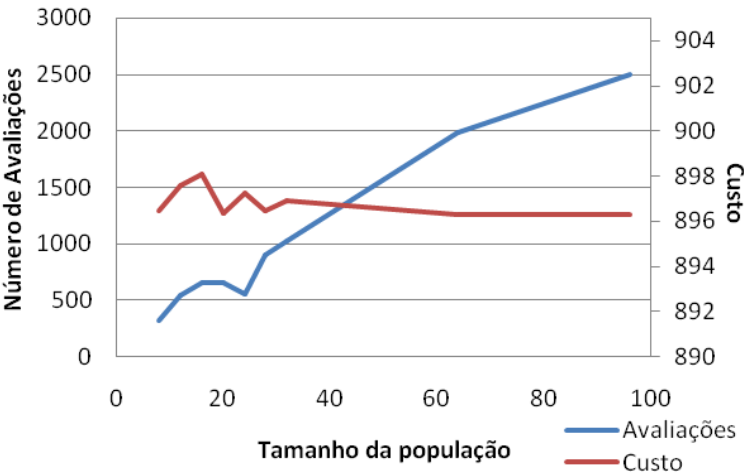


Figura 24 - Estudo da influência do tamanho da população

Esse resultado mostra a tendência do custo a um mínimo com o aumento da população. O gráfico também mostra que o número de avaliações cresce, com isso o custo computacional aumenta. Dessa forma é necessário que se encontre um equilíbrio para que se obtenha um mínimo global aceitável com um custo computacional razoável.

Para a análise da influência da taxa de mutação foram utilizados os mesmos parâmetros do estudo anterior, porém fixou-se o tamanho da população em 56 indivíduos e então foi variada a taxa de mutação conforme Tabela 8.

Tabela 8 - Taxa de mutação utilizadas

Taxas de mutação
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75

Com os resultados obtidos a partir dos diversos casos, foi gerada a Figura 25, a qual mostra o comportamento do algoritmo de acordo com a variação da taxa de mutação.



Figura 25 - Estudo da influência da taxa de mutação

Observando a Figura 25 pode-se primeiramente dizer que a ausência da taxa de mutação é extremamente prejudicial para o algoritmo, fornecendo um ótimo não aceitável.

As altas taxas de mutação também mostram-se prejudiciais, aumentando substancialmente o número de avaliações necessárias para se chegar a um ponto ótimo.

Observa-se uma região com uma tendência a redução do número de iterações necessárias para se encontrar o ponto ótimo, taxas de mutação entre 5 e 35% podem ser recomendadas para futuros estudos.

5.2.2 Estudo de Caso 2: Vaso de pressão.

Seguindo algumas indicações de dimensões e carregamentos da norma da Sociedade Americana de Engenharia Mecânica (ASME 2010) foi proposto um caso de otimização de um vaso de pressão em material compósito com as dimensões indicadas na Figura 27.



Figura 26 - Vista tridimensional do vaso de pressão em estudo

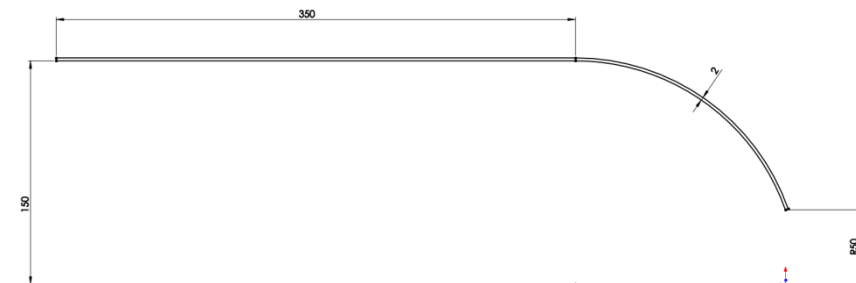


Figura 27 - Dimensões do vaso de pressão em estudo

Para que se pudesse otimizar o modelo com o menor custo computacional possível, foi imposta uma condição de simetria.

A malha utilizada para a análise do modelo pode ser vista na Figura 28.

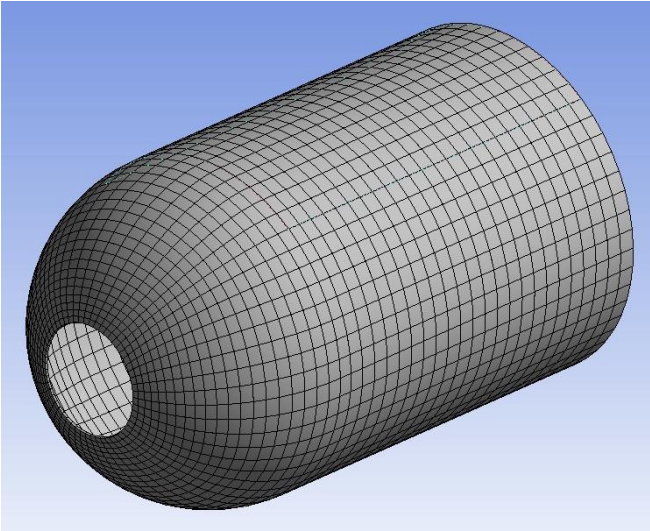


Figura 28 - Malha utilizada para simulação do vaso de pressão em estudo

Foi feita uma proposta de otimização do vaso de pressão apresentado anteriormente, construído com a fibra de carbono Epoxy 3501 detalhada na Tabela 2. Foram otimizadas as espessuras e os ângulos de orientação das lâminas conforme Figura 29. As condições para esse caso são apresentadas a seguir.

$$90 \leq \theta_1 \leq 180 \tag{5.14}$$

$$\theta_2 = \theta_1 - 90 \tag{5.15}$$

$$0,3 \leq E_1 \leq 2,5 \tag{5.16}$$

$$0,3 \leq E_2 \leq 2,5 \tag{5.17}$$

θ_1, E_1	
θ_2, E_2	
θ_1, E_1	
θ_2, E_2	

Figura 29 - Arranjo de espessuras e ângulos na estrutura proposta

A otimização proposta é baseada na minimização da massa da estrutura, com uma penalização de um critério de projeto imposta. A formulação do problema de otimização pode ser vista nos passos que seguem.

$$\min f(E_i) = \rho \cdot V(E_i) \quad (5.18)$$

sujeito:

$$\theta_{\inf} \leq \theta_j \leq \theta_{\sup} \quad j = 1 \quad (5.19)$$

$$E_{\inf} \leq E_i \leq E_{\sup} \quad i = 1,2 \quad (5.20)$$

$$S_{\max}(\theta_i, E_i) \leq S_{\limite} \quad (5.21)$$

sendo:

- S_{\max} o valor máximo encontrado do critério de Tsai-Wu na estrutura avaliada;

Cabe também destacar que:

- S_{\limite} é o critério de falha limite utilizado no projeto;

Este problema é reformulado utilizando o método de penalidade exterior exata conforme equação (5.22).

$$\min f(\theta_j, E_i) = \rho \cdot V(E_i) + \frac{1}{\epsilon} \left| < S_{\max}(\theta_j, E_i) - S_{\limite} >^+ \right| \quad (5.22)$$

Em que: $\epsilon=10^{-6}$

5.2.2.1 Parametrização do Algoritmo Genético Contínuo

Os parâmetros utilizados no segundo caso estudado são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 - Parâmetros utilizados no AGC para o Caso 2

Parâmetro	Valor	Unidade
Número de variáveis que serão otimizadas	3	Qtd
Limite mínimo da variável - ângulo	90	°
Limite máximo das variável - ângulo	180	°
Limite mínimo das variável - espessura	0,3	mm
Limite máximo das variável - espessura	2,5	mm

Tamanho da população inicial		60	Indivíduos
Taxa de mutação		0,3	%
Fração da população mantida (<i>crossover</i>)		50	%
Critério de Convergência	Número máximo de iterações	1200	Iterações
	Número máximo de resultados iguais consecutivos	120	Iterações
	Tolerância para determinar resultados iguais consecutivos	1	%

5.2.2.2 Análise dos Resultados

Após realizada a otimização pelo método do algoritmo genético contínuo, o indivíduo que apresentou o menor custo é o que possui a combinação apresentada na Tabela 10.

Tabela 10 - Solução ótima do caso em estudo

Variável	Valor otimizado
Θ_1	90,838
Θ_2	0,838
E_1	0,59017
E_2	0,91214

5.2.2.3 Análise do Comportamento do Algoritmo Genético Contínuo

Ao contrário do que é apresentado no Caso 1, a presente etapa tem o intuito de enriquecer a pesquisa retirando mais informações da rotina programada e estudar o comportamento do algoritmo genético contínuo.

A proposta se assemelha ao estudo conduzido por Haupt R.L.(1998), onde foi obtida uma matriz de resultados variando os dois parâmetros mais influentes: tamanho da população e taxa de mutação.

Os tamanhos de mutação e as taxas de mutação utilizadas no estudo são apresentadas na Tabela 11, foram realizadas todas as combinações possíveis com os valores apresentados.

Tabela 11 - Tamanhos de população e taxas de mutação utilizados

Tamanhos de População	Taxas de Mutação [%]
15	10
31	20
44	30
60	40
75	50
91	

Os resultados obtidos da função objetivo são apresentados na Tabela 12 e na Figura 30, as quais correlacionam todas as taxas de mutação com todos os tamanhos de população propostos.

Tabela 12 - Valores obtidos através da função objetivo para cada par de tamanho de população e taxa de mutação.

		Tamanho da População					
		15	31	44	60	75	91
Taxa de Mutação	10	4,49217	5,015	4,47718	4,51427	4,45431	4,38335
	20	4,71294	4,42032	4,48657	4,49502	4,45115	4,45527
	30	4,57843	4,46228	4,51101	4,321	4,39523	4,29115
	40	4,40958	4,42246	4,32051	4,47442	4,32538	4,41768
	50	4,45363	4,41398	4,29192	4,56601	4,44286	4,41047

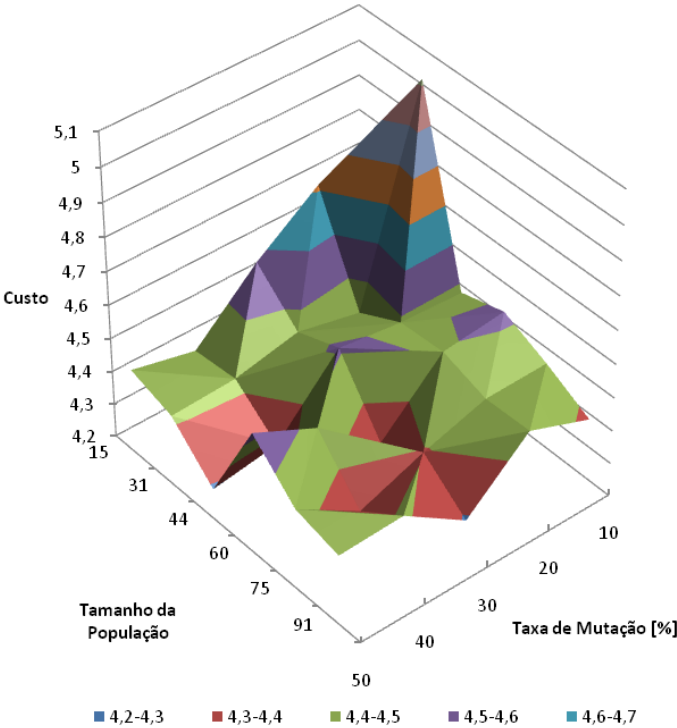


Figura 30 - Gráfico tridimensional da função objetivo para cada par de tamanho da população e taxa de mutação proposta.

Outro fator importante para a pesquisa é o custo computacional. Por este motivo a Tabela 13 e a Figura 31 apresentam o número de iterações necessários para que se obtivesse um resultado ótimo.

Tabela 13 - Número de iterações necessários para otimizar a cada par de tamanho de população e taxa de mutação proposta

		Tamanho da População					
		15	31	44	60	75	91
Taxa de Mutação	10	1440	2170	6028	8220	11700	9464
	20	2160	3379	3740	5520	6300	14742
	30	2925	5704	8096	12180	12675	9646
	40	1935	3441	8976	15480	14250	27209
	50	2625	6045	10780	7860	10275	15197

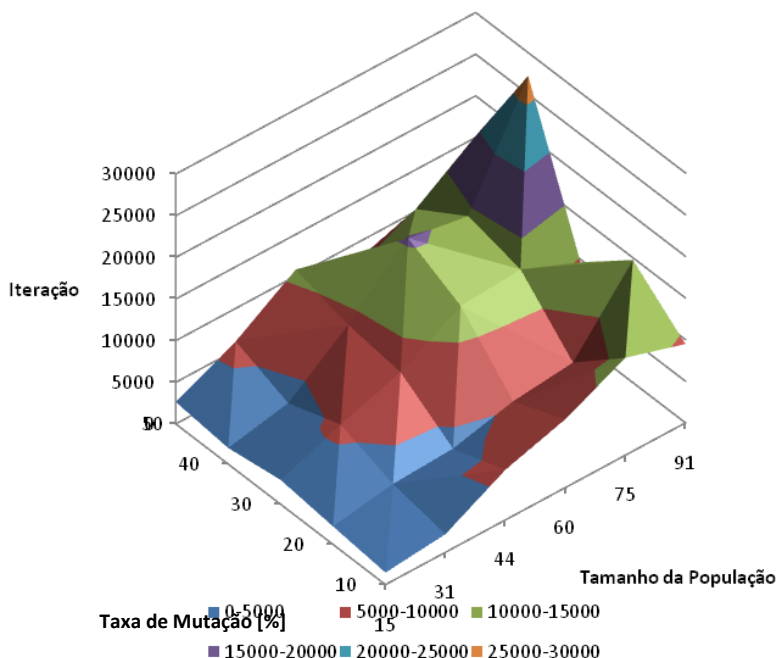


Figura 31 - Gráfico tridimensional do número de iterações para cada par de tamanho da população e taxa de mutação proposta

Conforme se observa, a análise gráfica tridimensional dos resultados, tanto do custo quanto do número de iterações não permite tirar conclusões claras acerca do resultado ótimo. No entanto, por meio de uma análise bidimensional da influência das taxas de mutação e dos respectivos tamanhos da população simulados, é possível avaliar melhor os resultados obtidos.

Os primeiros gráficos apresentados a seguir, relacionam a taxa de mutação e o tamanho da população com o valor obtido através da função objetivo, como pode ser observado nas Figura 32 e Figura 33.

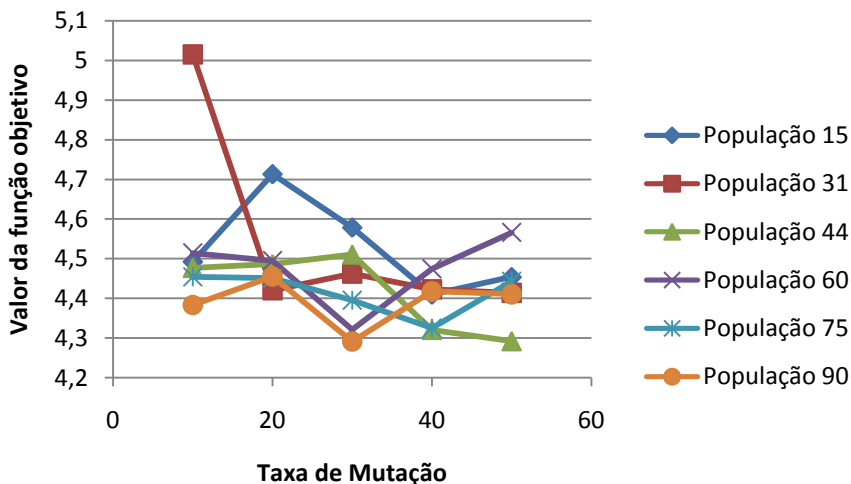


Figura 32 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e taxa de mutação para os diferentes tamanhos de população.

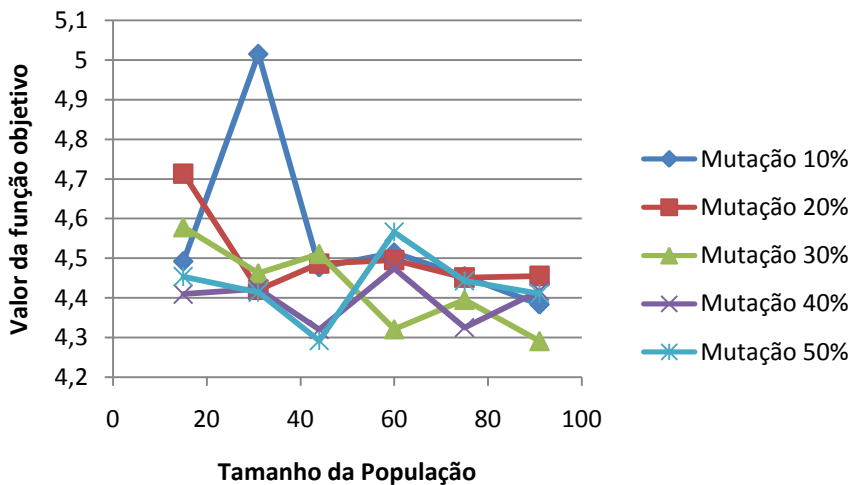


Figura 33 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e tamanho da população para as diferentes taxas de mutação.

Pelo comportamento observado nos gráficos acima, é possível concluir que há uma tendência de redução da dispersão tanto com o aumento da taxa de mutação, quanto com o aumento da população utilizadas na análise.

Outro item importante na análise dos resultados obtidos através da rotina é o custo computacional. Para avaliar este parâmetro foram traçados os gráficos que relacionam a população e a taxa de mutação com o número de iterações realizadas para se chegar ao ótimo. Os gráficos podem ser vistos na Figura 34 e Figura 35.

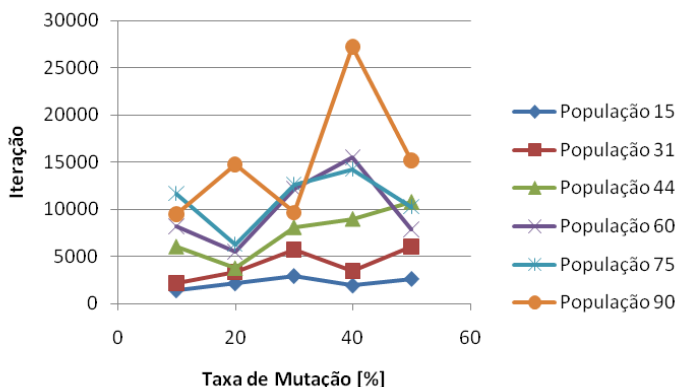


Figura 34 - Relação entre o número de iterações e a taxa de mutação para os diferentes tamanhos de população.

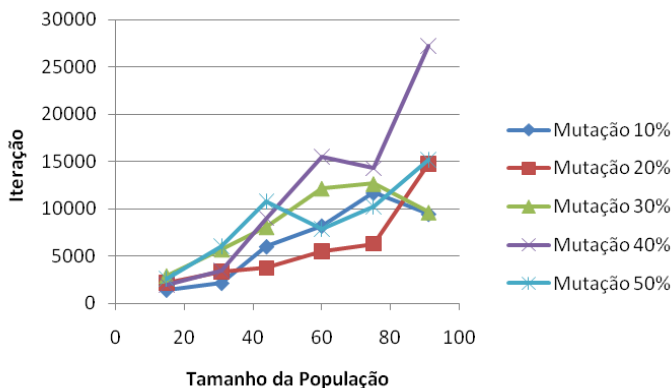


Figura 35 - Relação entre o número de iterações e o tamanho de população para as diferentes taxas de mutação.

A análise gráfica confirma as observações do Caso 1, ou seja, conforme a população aumenta o número de iterações da rotina também aumenta. Outro aspecto que é possível observar é que há uma leve tendência de diminuição no número de iterações com uma taxa de mutação menor.

Estas avaliações gráficas foram realizadas conforme os resultados finais obtidos, ou seja, não avaliam as variações ao longo das iterações que antecedem o resultado final. Para avaliar o comportamento do algoritmo durante as iterações são apresentadas as figuras 36, 37, 38, 39, 40 e 41, levando em conta o custo obtido através da função objetivo e das iterações, podendo-se observar a evolução para cada caso apresentado.

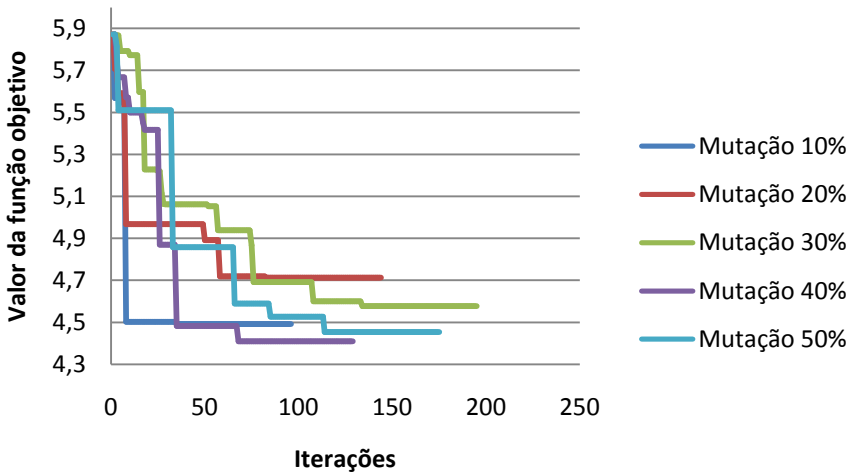


Figura 36 - Relação entre o valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 15 indivíduos.

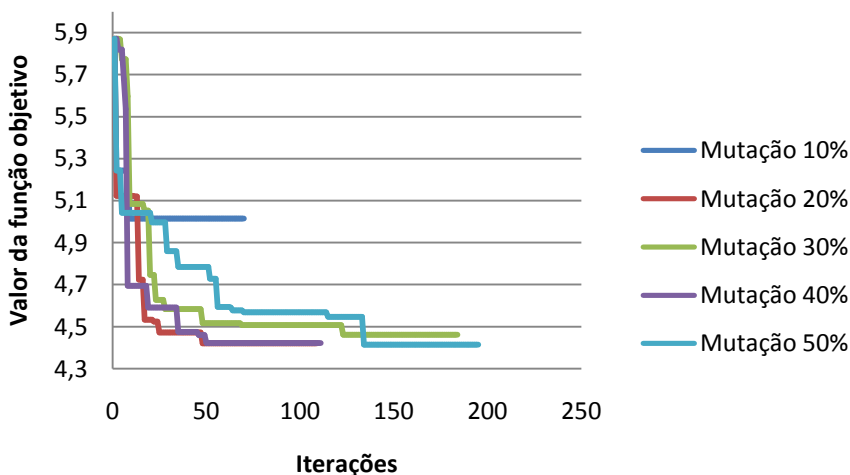


Figura 37 - - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 31 indivíduos.

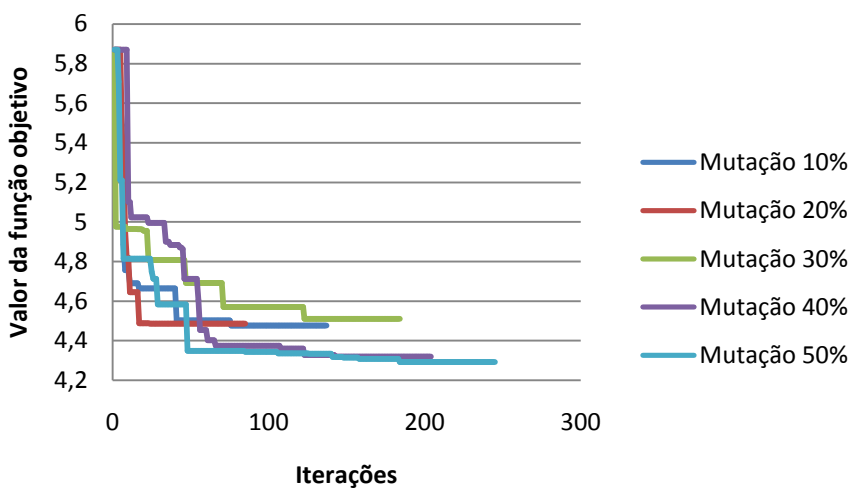


Figura 38 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 44 indivíduos.

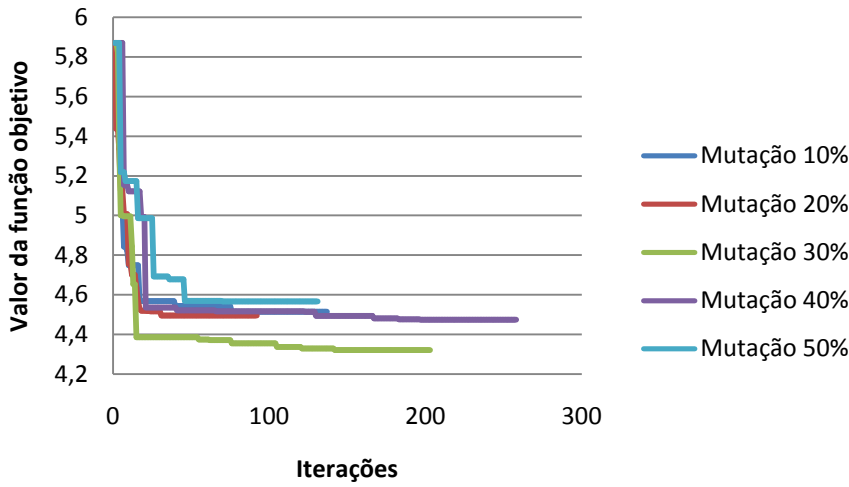


Figura 39 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 60 indivíduos.

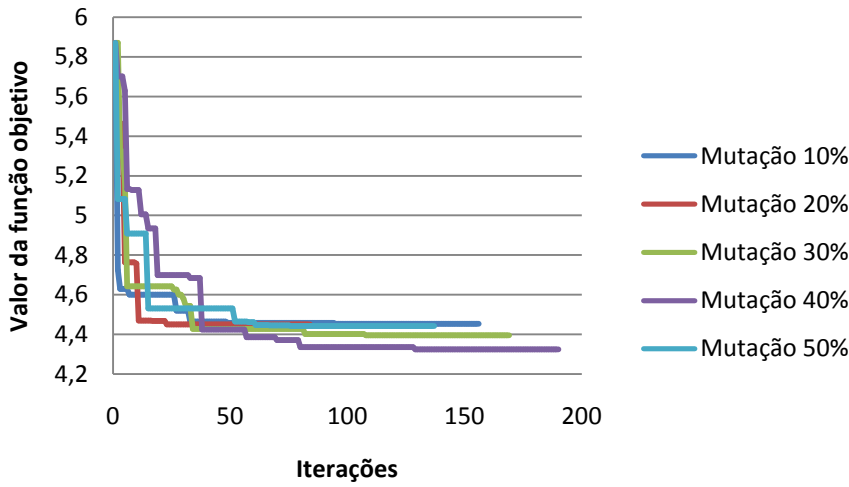


Figura 40 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 75 indivíduos.

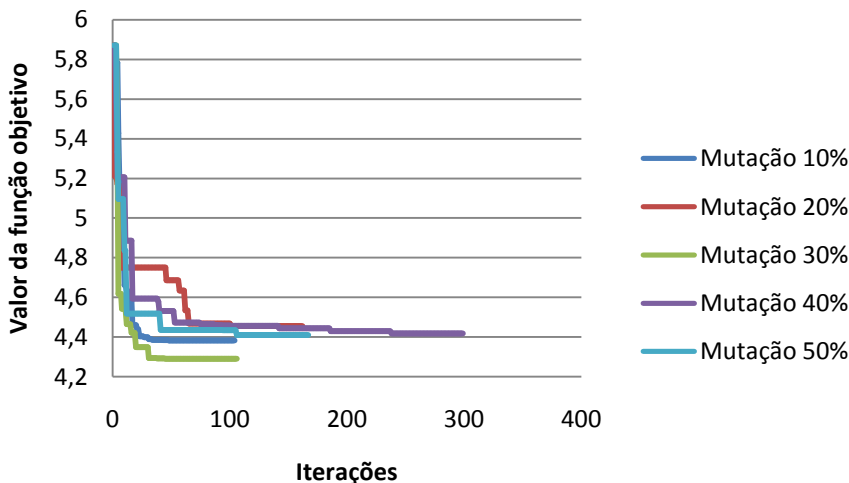


Figura 41 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para as diferentes taxas de mutação considerando uma população de 91 indivíduos.

Com a avaliação visual dos gráficos apresentados pode-se afirmar que, com o aumento da população se tem um comportamento mais estável do algoritmo, o que pode ter afetado a dispersão dos resultados finais observados na Figura 32 e Figura 33.

A mesma tendência pode ser observada realizando uma análise gráfica similar a apresentada acima, no entanto para as diferentes taxas de mutação. Ver Figuras 42, 43, 44, 45 e 46.

É importante destacar que uma baixa taxa de mutação pode ocasionar paradas em mínimos locais, prejudicando o resultado obtido pela função objetivo, um caso em destaque pode ser observado na Figura 42, no item com uma população de 31 indivíduos.

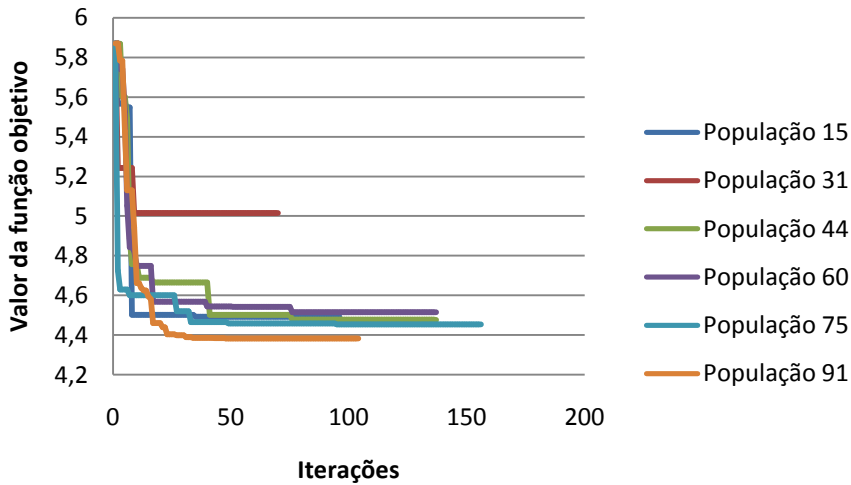


Figura 42 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 10%.

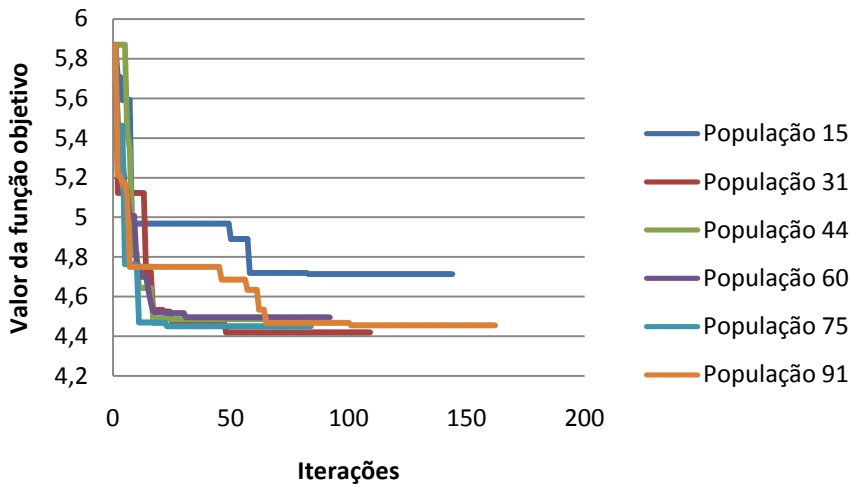


Figura 43 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 20%.

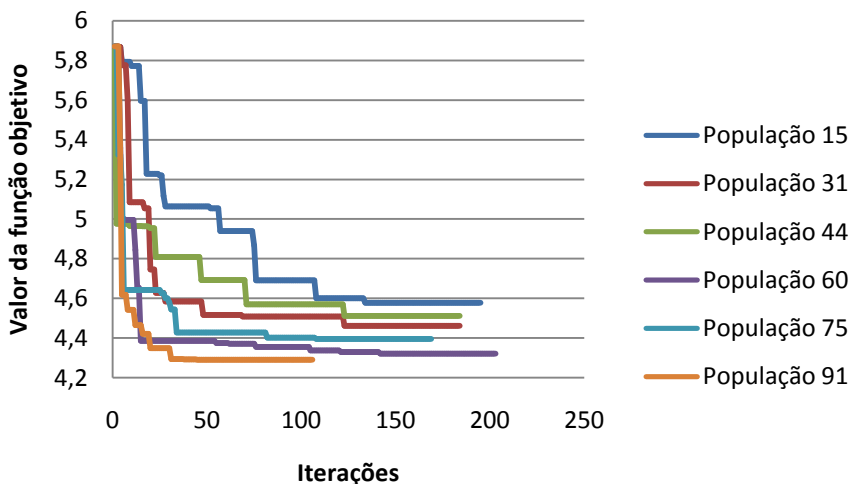


Figura 44 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 30%.

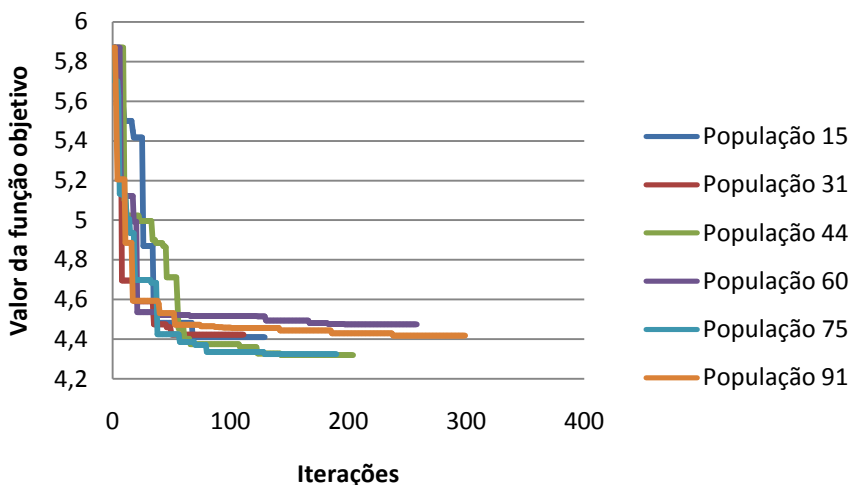


Figura 45 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 40%.

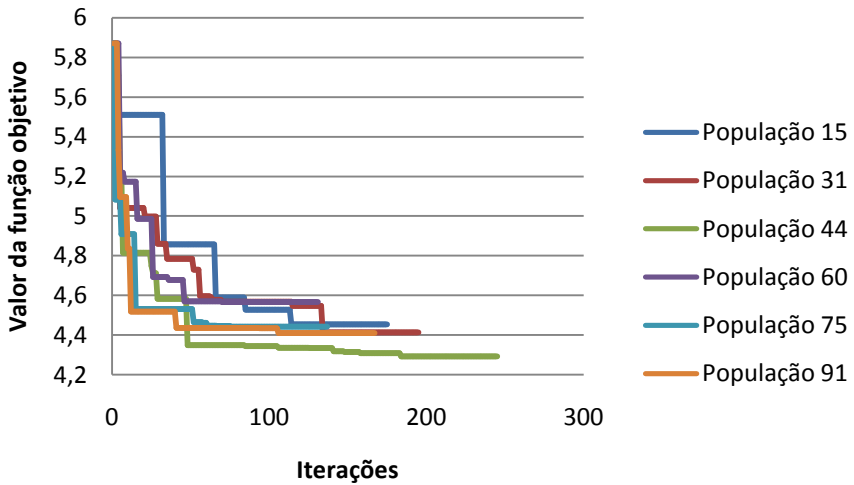


Figura 46 - Relação entre valor da função objetivo obtido e número de iterações para os diferentes tamanhos de população considerando uma taxa de mutação de 50%.

Motivado pelos resultados apresentados elaborou-se um estudo para avaliar se o fenômeno observado nos gráficos anteriores são representativos. As Figuras 47 e 48 apresentam o comportamento da média e o desvio padrão do custo obtido através da função objetivo para os tamanhos de população e taxas de mutação propostos inicialmente.

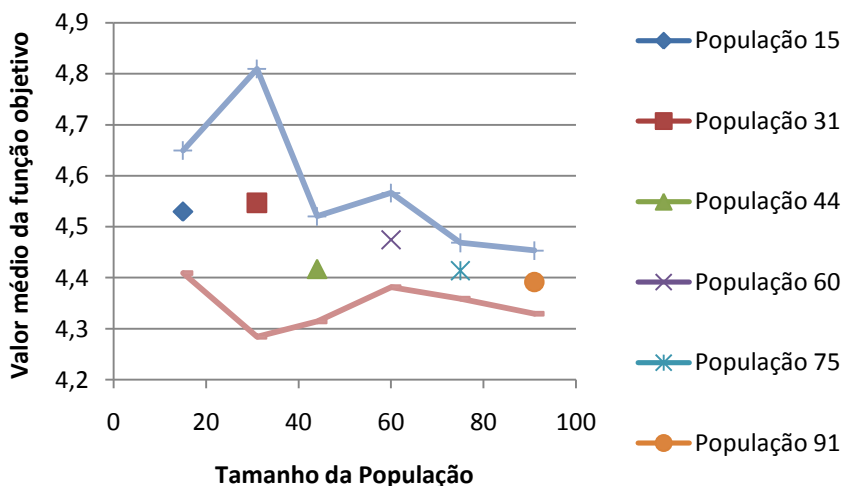


Figura 47 - Relação entre valor médio da função objetivo obtido e tamanho de população com seu respectivo desvio padrão.

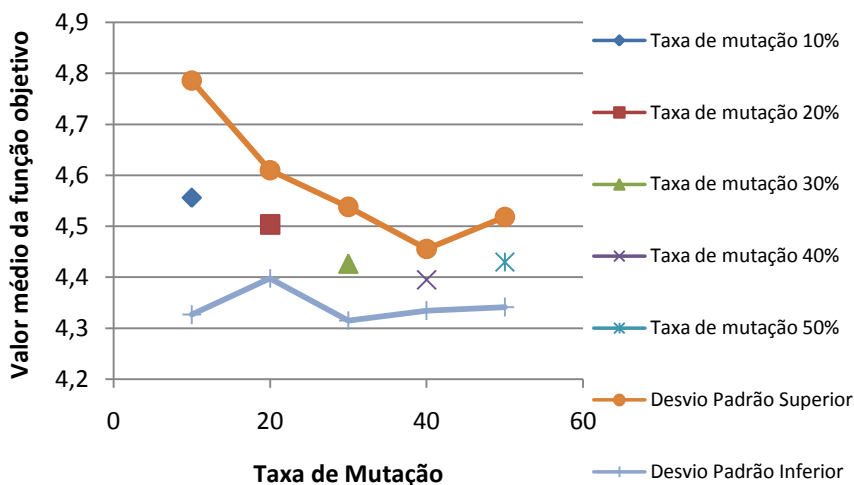


Figura 48 - Relação entre valor médio da função objetivo obtido e taxa de mutação com seu respectivo desvio padrão.

Conforme observado anteriormente, constatou-se que, para este caso, a dispersão nos resultados é atenuada a medida que se aumenta,

tanto o tamanho da população, quanto a taxa de mutação. Visualizando a tendência dos pontos de média apresentados, percebe-se um comportamento de aproximação ao mínimo global a medida que se aumenta o tamanho da população e a taxa de mutação. Para que se possa confirmar esse comportamento como algo geral é necessário que se estude o comportamento do algoritmo em muitos outros casos.

Por fim, com este capítulo pode-se concluir que o procedimento de otimização através dos algoritmos genéticos contínuos depende da precisão do resultado da função objetivo que se deseja e do limite de esforço computacional aceito ou tempo disponível para solução do problema.

6 CONCLUSÕES

6.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um método para otimização de estruturas mecânicas baseada no uso dos algoritmos genéticos, que permitem encontrar o ótimo global para as mais diversas aplicações.

Para alcançar os objetivos propostos, foi desenvolvida uma rotina computacional em algoritmo genético contínuo (AGC) que permitisse a interface com um software comercial dedicado a cálculo estrutural.

Os resultados apresentados nos estudos de caso, mostram que o adequado dimensionamento dos parâmetros do AGC, principalmente na taxa de mutação e no tamanho da população inicial, permitem obter ganhos significativos no valor da função objetivo otimizada. Resultam em uma boa aproximação da solução ótima e uma redução considerável no tempo de análise.

A metodologia proposta, se comparada a outras técnicas de otimização, mostra-se mais lenta, mas, por outro lado, tem-se a garantia do mínimo global. O baixo número de variáveis que podem ser utilizadas no processo de otimização também é visto de forma negativa, mas para se chegar a uma solução que se aproxime do ótimo, deve-se conhecer bem o comportamento físico do problema a ser trabalhado, para então utilizar a estratégia de escolher as variáveis que mais representarão ganho na função objetivo.

O presente trabalho proporcionou também o esclarecimento no que se refere aos parâmetros do algoritmo genético contínuo, apresentando o comportamento segundo a variação desses parâmetros nos casos estudados e fundamentando-se em bibliografias para tal. Isso facilitará para futuros pesquisadores que desejam trabalhar com esse tipo de ferramenta.

Por fim, a dissertação contribuiu ao meio acadêmico através da validação e desenvolvimento de uma ferramenta de otimização que pudesse ser aplicada nos mais diversos campos da engenharia.

6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

No decorrer do trabalho foram observados alguns tópicos que merecem ser destacados e sugeridos para futuras pesquisas como:

- Fazer um estudo mais minucioso sobre o comportamento do AGC com a variação da taxa de mutação e o tamanho da população, aplicando-o em diversos casos;
- Aplicar o procedimento em problemas com múltiplos objetivos;
- Utilizar a técnica do AGC paralelo para que se possa aumentar a velocidade de solução;
- Desenvolver uma plataforma mais robusta de otimização;
- Aplicar a técnica em problemas com um nível de complexidade maior, em áreas diferentes;
- Comparar o desempenho do procedimento com outras estratégias de otimização, para que se possa visualizar as situações onde devem ser aplicadas cada técnica estudada.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F.S; AWRUCH A.M; **Design optimization of composite laminated structure using genetic algorithms and finite elements analysis.** Graduate Program in Civil Engineering. Porto Alegre - RS: Federal University of Rio Grande do Sul, 2009.

AL-SHIHRI, M.A; **Structural optimization using a novel genetic algorithm for rapid convergence.** International Journal of Civil and Structural Engineering. Volume 1, No 2. Civil Engineering, Porto Alegre - RS: Federal University of Rio Grande do Sul, 2009.

AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. **Fiber-reinforced plastic pressure vessels.** ASME boiler and pressure vessel code, Section X, 2010.

ARORA, J.S., **Introduction to Optimum Design**, 2nd ed., Elsevier Academic Press, San Diego, USA, 2004.

AZEVEDO, A; **Livro de Mecânica dos Sólidos**, Graduação em Engenharia Civil, FEUP, 1996.

BARBOSA, M. A; **Análise estrutural de uma roda de material compósito para uso aeronáutico.** Anais do 14º Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA – XIV ENCITA, 2008.

BELO, I. M.. **Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando-se a formulação de elementos finitos corrigida a priori sem os efeitos do travamento.** Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006.

BRYAN, H.; **Engineering Composite Materials.** The Institute of Materials, London, 1999

CALLISTER JR ; **Materials science and engineering.** John Wiley, New York, 1985.

CASTRO, et al. , **Minimum weight design of framed structures using a genetic algorithm considering dynamic analysis.** Latin American

Journal of Solids and Structures 3 (2006) 107-123. Disponível em: www.lajss.org

CHELOUAH, R; SIARRY, P; **A Continuous genetic algorithm designed for the global optimization of multimodal functions.** Journal of Heuristics, 6: 191-213. 2000.

COSTA et al. **Structural optimization of laminated plates with genetic algorithms.** Departamento de Engenharia Mecânica. Portugal : Universidade de Coimbra, 1998.

CUPERTINO, L. F. **Modelagem do módulo de Yang em nanocompósitos através de inteligência computacional.** Pós-graduação em Engenharia Elétrica. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.

DE JONG, K. A. **Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems.** Ph.D. Dissertation. University of Michigan, Ann Arbor, 1975.

ERBATUR, Fuat; HASANÇEBİ, Oguzhan; TUTCU, Ilker; KILIÇ, Hakan. **Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms.** Computers & Structures 75:2, 209-224. Online publication date: 1-Mar-2000.

FORREST, S. **Genetic Algorithms: Principles of Natural Selection Applied to Computation.** Science, vol.261 pp. 872-878, 1993.

GATZI, Roman; UEBERSAX, Marion; KONIG, Oliver. **Structural optimization tool using genetic algorithms and Ansys.** CAD-FEM User's meeting Schweiz. June, 2000.

GIBSON, R. F; **Principles of Composite Material.** McGraw-Hill, 1994

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1989a.

GOLDBERG, D. E. **Sizing populations for serial and parallel genetic algorithms.** In J. D. Schaffer (ed.), Proc. 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms. Los Altos, CA: Morgan Kaufmann, pp. 70-79, 1989b.

GOLDBERG D. E., K. Deb, and B. Korb. **Messy genetic algorithms: Motivation, analysis and first results.** Complex Syst. 3:493–530. 1989c.

HAFTKA, R.T. , GURDAL. Z. and HAJELA P. **Design and Optimization of Laminated Composite Materials**, John Wiley, 1998.

HAUPT et al. **Practical Genetic Algorithms.** 2nd Edition. John Wiley & Sons. , 2004.

HAUPT, R. L. **Practical genetic algorithms** 2nd edition. “A Wiley-Interscience publication.”, 1998

HAUPT, R. L.. **Synthesis of resistive tapers to control scattering patterns of strips.** Ph.D. dissertation. University of Michigan, Ann Arbor, 1987

HIBBELLER, R.C; **Resistência dos materiais.** 7th Edition, Pearson publishers, 2010.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems.** Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

KAVEH, A; RAD, S. M. **Hybrid genetic algorithm and participle swarm optimization for the force method-based simultaneous analysis and design.** Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B: Engineering, Vol 34, No B1, pp 15-34. Shiraz University, 2010.

KAW, A. K, **Mechanics of composite materials.** Second edition Taylor & Francis, 2006.

KUMAR, Rajesh. **Cost optimization of industrial building using genetic algorithm.** International Journal of Scientific Engineering and Technology. Volume 2 issue 4, pp: 185-191. Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology(BHU), 2013.

JONES, R.M.; **Mechanics of composite materials.** 2nd Edition, Taylor & Francis, 1999.

LOPÉZ, S. D., **Otimização de placas e cascas de materiais compósitos, utilizando algoritmos genéticos, redes neurais e elementos finitos**. Pós-graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. New York: Springer-Verlag, 1992.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**, 2nd ed. New York: Springer, 1996.

NINNI, C., et al. - **Otimização de painéis compósitos sob cargas de compressão**. Asociación Argentina de Mecánica, 2010.

PEREIRA, J.C; **Curso de Projeto Estrutural com Materiais Compostos**. 139f. Apostila – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

PEZESHK, S. et al. **State of art on the use of genetic algorithms in design of steel structures**. Department of Civil Engineering. The University of Memphis, 2004.

PINHEIRO, D. J. G. **Análise Estática e Dinâmica de Painéis Corrugados Construídos em Materiais Compósitos**. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Lisboa: Pontifícia Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2010.

RADCLIFF, N. J. **Form aanalysis and random respectful recombination**. In Proc. 4th Int. Conf. on Genetic Algorithms, San Mateo, CA: Morgan Kauffman, 1991.

REDDY, J.N; **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis**. CRC Press, 2ND Edition, United States of America, 2004

REEVES et al; **Genetic Algorithms: Principles and Perspectives - A Guide to GA Theory**. Klumer academic publishers, 2002.

SARAMAGO et al. , **Introdução às técnicas de otimização em engenharia**. Editora: Horizonte científico, v1, n9, 2008.

SIVANANDAM et al. **Introduction to Genetic Algorithms**. Springer, 2008

SIVARAJ, et al. **A review of selection methods in genetic algorithm**. International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST) , 2001.

SOMMER, Rafael. C, **Otimização de estruturas por algoritmos genéticos submetidas a restrições de flexibilidade e flambagem**. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

WEISE, T. **Global optimization algorithms – theory and applications**. From, Website: <http://www.it-weise.de/projects/book.pdf>, 2009.

WRIGHT, A. **Genetic algorithms for real parameter optimization**. In G. J. E. Rawlins (ed.), *Foundations of Genetic Algorithms*. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, pp. 205–218, 1991.

ANEXOS

MUDANÇA DE BASE

A realização da mudança de base é feita através de dois sistemas de coordenadas cartesianas ortonormais, sendo suas respectivas bases $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Onde θ é considerado a rotação do eixo \vec{e}_1 com relação ao eixo \vec{e}_x , rotação esta ocorrendo no plano $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ o qual contém os vetores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Então obtém-se:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3\end{aligned}\tag{2.1}$$

e,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_2 &= -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z\end{aligned}\tag{2.2}$$

Então

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x_1 (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) + x_2 (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) + x_3 \vec{e}_3 \\ &= \{x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)\} \vec{e}_x + \{x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta)\} \vec{e}_y + x_3 \vec{e}_z\end{aligned}\tag{2.3}$$

O que implica em

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) \\ y &= x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \\ z &= x_3\end{aligned}\tag{2.4}$$

Expresso na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}\tag{2.5}$$

i.e.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

em que

$$[R]^T [R] = [R][R]^T = [I] \quad (2.7)$$

e

$$\det[R] = 1 \quad (2.8)$$

sendo $[R]$ uma matriz ortogonal própria.

Se $[\sigma]$ e $[\sigma^L]$ são as matrizes que representam um tensor nas respectivas bases $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Tem-se:

$$[\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} = [\sigma^L] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L, \quad (2.9)$$

na qual \vec{v} é arbitrário e

$$\vec{v} = [R] \vec{v}^L. \quad (2.10)$$

Conseqüentemente, tem-se

$$\begin{aligned} [\sigma] \vec{v} \cdot \vec{v} &= [\sigma][R] \vec{v}^L \cdot [R] \vec{v}^L \\ &= [R]^T [\sigma][R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L. \end{aligned} \quad (2.11)$$

i.e.

$$[\sigma^L] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L = [R]^T [\sigma][R] \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L. \quad (2.12)$$

Como \vec{v}^L é arbitrário, obtém-se

$$\begin{aligned} [\sigma^L] &= [R]^T [\sigma] [R] \\ \text{ou} \\ [\sigma] &= [R] [\sigma^L] [R]^T. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considera-se que

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

e

$$[\sigma^L] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Os vetores são definidos como,

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^T &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\} \\ \text{e} \\ (\vec{\sigma}^L)^T &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

e considerando-se que

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pode-se expressar como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \cos^2(\theta) - 2\sigma_{12} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{22} \sin^2(\theta) \\ \sigma_{11} \sin^2(\theta) + 2\sigma_{12} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{22} \cos^2(\theta) \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \sin(\theta) + \sigma_{23} \cos(\theta) \\ \sigma_{13} \cos(\theta) - \sigma_{23} \sin(\theta) \\ \sigma_{11} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{12} [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - \sigma_{22} \sin(\theta) \cos(\theta) \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

o que nos permite obter

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

i.e.

$$\vec{\sigma} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^L, \quad (2.20)$$

no qual

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$